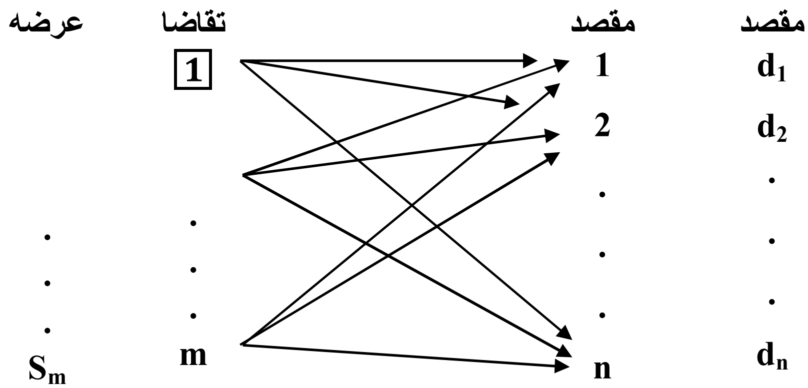
مسئله حمل و نقل و برنامه ریزی خطی :

در قلمرو پژوهش عملیاتی حمل و نقل مقدار معینی از یک محصول از M نقطه به عنوان مبدأ برای عرضه به n نقطه ، برای مقصد جهت ارضای تقاضای مقصدها به صورت یک مدل حمل و نقل با توجه به موارد زیر تعریف می شود .

1. هزینه حمل و نقل معین باشد .
2. تقاضای مقصد ها از طریق عرضه کالا از مبادی تأمین می شود .



اگر x_{ij} بیانگر میزان کالایی باشد که از مبدأ i به مقصد j حمل می شود مدل برنامه ریزی خطی آن چنین است .

مقدار هزینه

$$1)\ min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} Cij \quad xij$$

$$2)\ \mathbf{s.t} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = S_i \\ \quad\vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \end{cases} \Longrightarrow (\sum s_i = \sum d_j)$$

$$3)\ x_{ij} \geq 0$$

X_{ij} = مقدار کالا از i به j

C_{ij} = مقدار هزینه از i به j

نکته : یعنی مجموع مقدار کل عرضه با مجموع تقاضای کل برابر است ، اگر اینگونه نباشد به سادگی می توان این شرط را برای مدل تأمین کرد .

توجه کنید که :

1) امکان ارسال کالا بین دو مبدأ یا دو مقصد وجود ندارد .
2) مقدار عرضه و تقاضا در هر دوره زمانی ثابت فرض می شود .
3) در این مسئله مهم نیست که تقاضای هر مقصد از کجا تأمین می شود ، فقط برای ما مقدار هزینه مهم است .

مقاصد / مبادی	1	2	3	....	m	عرضه
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	....	C_{1n}	S_1
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	....	C_{2n}	S_2
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	....	C_{3n}	S_3
.	.	.	.	....	.	.
.	.	.	.	....	.	.
.	.	.	.	....	.	.
M	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}		C_{mn}	S_m
تقاضا	d_1	d_2	d_3	....	d_n	–

مثال 1 : هدف ارسال محصولی از سه شهر **1و2و3** به سه شهر **C,B,A** است ، هزینه حمل هر واحد و میزان عرضه و تقاضا در جدول زیر آمده است .

(می خواهیم با حداقل هزینه تقاضای شهرهای زیر را برآورده کنیم .)

مقاصد / مبدا	A	B	C	عرضه
1	15	12	24	400
2	7	8	15	300
3	27	18	21	100
تقاضا	360	300	140	800

X_1A مقدار کالای ارسالی از شهر 1 به شهر A

X_1B مقدار کالای ارسالی از شهر 1 به شهر B

X_2C مقدار کالای ارسالی از شهر 2 به شهر C

$MinZ = 15x_1A + 12x_1B + 24x_1C + 7x_2A + 8x_2B + 15x_2C + 27x_3A + 18x_3B + 21x_3C$

$$
\text{s.t}\quad
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}
x_1A + x_1B + x_1C = 400 \\
x_1A + x_2B + x_2C = 300 \\
x_1A + x_2B + x_3C = 100
\end{array}\right\} \text{عرضه} \\
\text{و} \\
\left.\begin{array}{l}
x_1A + x_2A + x_3A = 360 \\
x_1B + x_2B + x_3B = 300 \\
x_1C + x_2C + x_3C = 100
\end{array}\right\} \text{تقاضا}
\end{cases}
$$

$x_{ij} \geq 0$

ساختار مدل حمل و نقل دارای مشخصات زیر است :

1. ضرائب تمام متغیرهای تصمیم در محدودیتها عدد 1 است .
2. هر یک از متغیرهای تصمیم در محدودیتها فقط دوبار ظاهر می شوند.

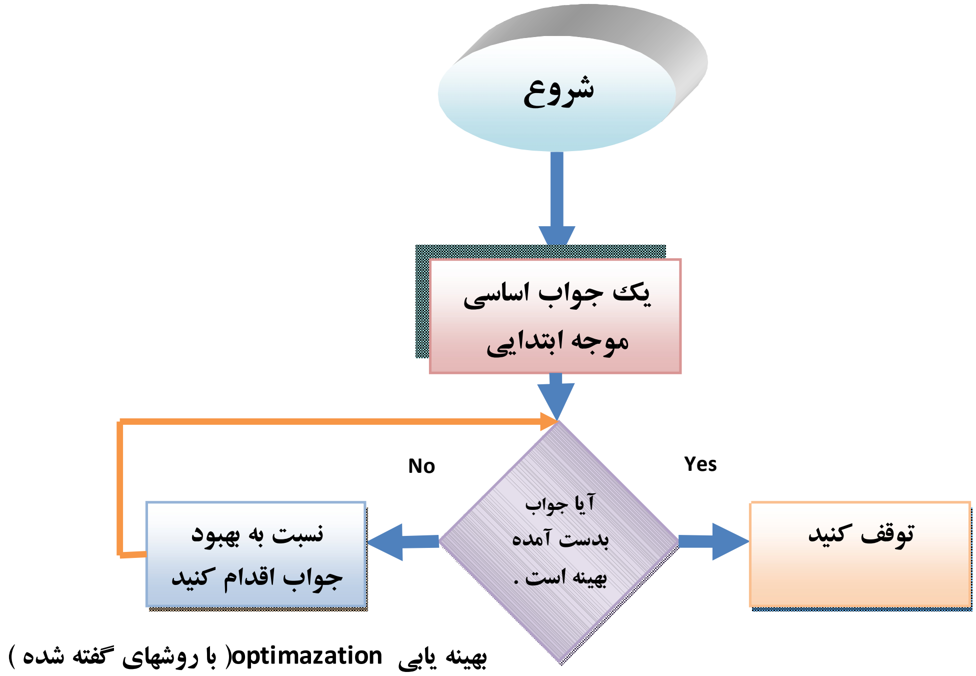
   (یکبار در محدودیتهای عرضه ، یکبار در محدودیتهای تقاضا)

3. مجموع عرضه با مجموع تقاضا برابر است .

مشخصات فوق امکان حل مسائل حمل و نقل را با آلگوریتم خاص حمل و نقل فراهم می آورد .

در یک مسئله برنامه ریزی خطی تعداد متغیرهای تصمیم برابر با **mxn** و تعداد متغیرهای اساسی **m+n** می باشد.

برای حل این مسائل روشهایی بیان می شود که با نمودار عملیاتی حل مسئله حمل و نقل آن را نشان می دهیم .



برای بدست آوردن یک جواب موجه ابتدایی یکی از روشهای زیر را پیش می گیریم .

1. **روش گوشه شمال غربی**
2. **روش حداقل سطر**
3. **روش حداقل هزینه**
4. **روش تخمین و گل**
5. **حداقل ستون**

(درصد کمی از انسانها نود سال زندگی می کنند مابقی یک سال را نود بار تکرار می کنند . . .)

(کورش کبیر)

1) روش گوشه شمال غربی : در این روش گام های زیر را پیش می گیریم

گام اول : از خانه شمال غربی جدول شروع می کنیم و به این خانه مقدار کمتر ستون عرضه یا سطر تقاضا را تخمین دهید .

بعد از تخصیص مقادیر جدید و عرضه و تقاضا را با کسر این مقدار تخصیص داده شده از مقادیر اصلی در سطر و ستون عرضه و تقاضا بنویسید .

گام دوم : اگر مقدار جدید تقاضا برای یک ستون صفر شد به خانه کناری سمت راست حرکت کنید و اگر مقدار جدید عرضه صفر شد به خانه پایین آن حرکت کنید و اگر همزمان هر دو صفر شدند در خانه سمت راستی یا پائینی (نه هر دو)

گام سوم : به خانه جدید تا آنجا که ممکن است تخصیص دهید و طبق گام دوم مجدد مقادیر عرضه و تقاضای جدید را بنویسید .

گام چهارم : گام های دوم و سوم را آنقدر تکرار کنید تا به جواب اساسی موجه ابتدایی برسید . **مثال 2**

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	15 360	12 40	24	400
2	7	8 260	15 40	300
3	27	18	21 100	100
نمونه	360	300	140	800

کل هزینه = **min z** =(360×15) + (40×12)+ (260×8)+(40×15)+ (100×21)=**10660**

2) روش حداقل سطر : همانطور که از نامش پیداست این روش سعی در تخصیص مقادیر به خانه های با کمترین هزینه در هر سطر دارد که آلگوریتم آن به شرح زیر است :

گام اول : خانه ای که دارای کمترین هزینه در سطر اول است را پیدا کنید . (اگر دو خانه این شرایط را داشتند یکی را انتخاب کنید) و حداکثر مقدار ممکن را به آن تخصیص دهید (یعنی کمترین مقدار عرضه و تقاضا حداکثر مقدار ممکن می شود) مقدار جدید عرضه و تقاضا با کسر مقدار تخصیص داده شده تولید می شود .

گام دوم : اگر مقدار جدید تقاضا برای یک ستون صفر شود آن ستون و اگر مقدار جدید عرضه صفر شود آن سطر و اگر هر دو صفر شدند فقط یکی از آنها را در عملیات بعدی در نظر نمی گیریم (یعنی حذف می شود)

گام سوم : گام های یک و دو را برای سطر دوم تا آخرین سطر به ترتیب انجام می دهیم در صورتی که تمام مقدار عرضه تخصیص یافته و تمامی مقدار تقاضا ارضا شده باشند عملیات خاتمه می یابد در غیر این صورت عملیات را از سطر اول تکرار می کنیم . **مثال 3**

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	15 60	12 300	24 40	400
2	7 300	8	15	300
3	27	18	21 100	100
تقاضا	360	300	140	800

Min Z_1 = (60×15)+ (300×12) + (40×24)+ (300×7)+ (100×21)=**9660**

برای امتحان درستی جواب در هر سطر (**سطر اول**) **60+300+40 = 400**

تمرین 1

مقصد / مبدأ	A	B	C	D	عرضه
1	7	8	15	10	300
2	25	11	9	4	100
3	17	27	19	4	310
4	23	21	10	17	190
تقاضا	260	140	200	300	900

Min Z_1=

تمرین 2

مقصد / مبدأ	A	B	C	D	عرضه
1	10	7	18	19	100
2	20	2	2	27	400
3	14	17	19	10	230
4	5	7	11	2	270
تقاضا	190	160	380	270	1000

Min Z_1=

(نصف اشباهاتمان ناشی از این است که وقتی باید فکر کنیم ، احساس می کنیم و وقتی که باید احساس کنیم ، فکر می کنیم ...)

(کورش کبیر)

3– روش حداقل هزینه : برای بدست آوردن جواب موجه ابتدایی هزینه ها را در کل جدول در نظر می گیریم .

گام اول : خانه ای را که در تمام جدول دارای کمترین هزینه است را در نظر بگیرید اگر بیش از یکی بود یکی را به دلخواه انتخاب کنید و حداکثر مقدار ممکن را که معادل حداقل میزان عرضه و حداکثر میزان تقاضاست به آن خانه اختصاص دهید .

گام دوم : همچون گذشته هر کدامی که صفر شدند سطر و ستون را در نظر نمی گیریم اگر هر دو همزمان صفر شدند یکی از آنها را به دلخواه در نظر می گیریم .

گام سوم : حداکثر مقدار ممکن را تخصیص و مقدار عرضه و تقاضای جدید را با کسر مقدار تخصیص از آنها بنویسید .

گام چهارم : گام های دوم و سوم را تا ارضای عرضه و تقاضا ادامه دهید .

مثال 4

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	7 (50)	8	10	50
2	9 (60)	24	15 (130)	190
3	11	2 (150)	14 (110)	260
تقاضا	110	150	240	500

$$\text{Min } Z_1 = (50\times7)+(60\times9)+(130\times15)+(150\times2)+(110\times14)=\mathbf{4680}$$

4- روش وگل : این روش اگر چه پیچیده تر از روشهای قبلی است اما معمولاًنسبت به روشهای دیگر به ویژه در مسائل بزرگ جواب موجه ابتدایی بهتری را ارائه می کند روش تخمین وگل اطلاعات مربوط به هزینه را با به کارگیری مفهوم هزینه فرصت از دست رفته برای تعئین جواب موجه ابتدایی استفاده می کند ، این روش تفاوت بین دو مورد از کم ترین هزینه هایی که در خانه های هر سطر یا ستون قرار دارد را مورد بررسی قرار می دهد ، وی کوشید از تخصیص به خانه های پر هزینه اجتناب کند . این تفاوت حداقل هزینه فرصتی (جریمه) ناشی از عدم تخصیص صحیح را بیان می کند .

گام اول : برای هر سطر جریمه حاصل از تفاضل **2** خانه ای که دارای کمترین هزینه در هر سطر است را محاسبه کنید و این کار را برای ستون ها هم انجام دهید .

گام دوم : سطر یا ستونی که دارای بیشترین مقدار جریمه است را انتخاب کنید و خانه ای که کمترین هزینه را در هر سطر یا ستون انتخابی دارد انتخاب کنید و حداکثر مقدار ممکن را به آن خانه تخصیص دهید .

اگر در یک سطر یا ستون تنها یک خانه باقی مانده باشد آن را هم انتخاب کنید و مقداری را که ضروری است به آن اختصاص دهید و سپس عرضه و تقاضای جدید را همچون گذشته بنویسید یا کم کنید.

گام سوم : اگر عرضه یک سطر صفر شد آن سطر و اگر تقاضای یک ستون صفر شد آن ستون را صفر کنید و اگر همزمان صفر شدند یکی از آنها را به دلخواه صفر کنید .

گام چهارم : گام دوم و سوم را تا رسیدن به جواب موجه ابتدایی تکرار کنید .

مثال 5

مقصد / مبدأ	A	B	C	**عرضه**	جریمه 1	جریمه 2	جریمه 3	جریمه 4
1	**15** **60**	**12** **300**	**24** **40**	**400** **340** **40**	**3**	**3**	**12**	**24**
2	**7** **300**	**8**	**15**	**300** **0**	**1**	–	–	–
3	**27**	**18**	**21** **100**	**100** **0**	**3**	**3**	**3**	**21**
تقاضا	**360** **60** **0**	**300** **0**	**140** **40** **0**	**800**				
جریمه 1	**8**	**4**	**6**					
جریمه 2	**12**	**6**	**3**					
جریمه 3	–	**6**	**3**					
جریمه 4	–	–	**3**					

$\mathbf{Min\ Z_1} = (60\times15)+(300\times12)+(24\times40)+(300\times7)+(100\times21) = \mathbf{9660}$

تمرین 3

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	جریمه 1	جریمه 2	جریمه 3	جریمه 4
1	**5**	**15**	**9**	**450**				
2	**9**	**3**	**4**	**350**				
3	**4**	**10**	**6**	**200**				
تقاضا	**360**	**400**	**240**	**1000**				
جریمه 1								
جریمه 2								
جریمه 3								
جریمه 4								

Min Z_1 =

نکـتـه: فزونی عرضه کل از تقاضای کل : وقتی مقدار عرضه کل از تقاضای کل بیشتر باشد $(\sum si > \sum di)$ باید یک ستون تقاضای مجازی با میزان تقاضایی معادل $\sum si > \sum di$ به جدول حمل و نقل اضافه شود ، هزینه های حمل هر واحد کالا برای این ستون مجازی چون واقعاًکالایی حمل نمی شود صفر منظور می گردد این روال(همچنین برای سطر) .

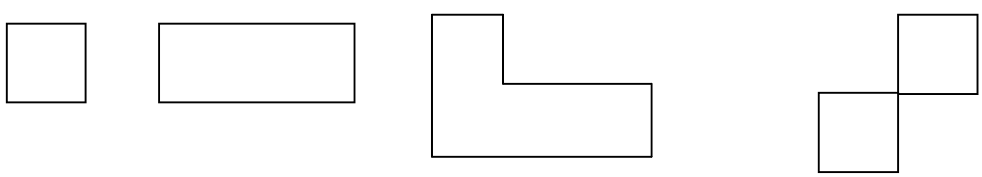
بهبود جواب : در قسمت قبل آموختیم که چگونه باید به جواب موجه ابتدایی برسیم با توجه به جواب موجه ابتدایی باید توجه داشت.که هیچکدام از روشهای گفته شده مستقیماًبه جواب بهینه نمی رسند حتی اگر این چنین باشد تضمینی در کار نیست حال در این قسمت می آموزیم که چگونه ارزیابی کنیم متغیر غیر اساسی ، انتخاب متغیر ورودی ، و متغیر اساسی خروجی و محاسبه جواب بهینه **(بهبود یافته)**

آلگوریتم پله سنگ :

گام اول : یک خانه خالی (یک متغیر غیر اساسی) را برای ارزیابی انتخاب کنید .

گام دوم : برای خانه خالی انتخاب شده یک مسیر پله سنگ رسم کنید ، مشخصات این مسیر به شرح زیر است :

الف) مسیر پله سنگ مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاعی عمود بر هم و عمدتاًبه یکی از اشکال زیر می باشد .



ب) یکی از گوشه های این مسیر در خانه خالی انتخابی (خانه ای که متغیر آن غیر اساسی است) قرار گرفته و سایر گوشه ها باید در خانه پُر (خانه ای که دارای متغیر اساسی است) واقع شود .

ج) به گوشه ای که در خانه خالی قرار گرفته علامت مثبت و به سایر گوشه ها یک در میان مثبت ومنفی .

نکته 1 : به اعداد داخل جدول متغیرهای اساسی گفته می شود .

نکته 2 : به اعداد یا حروف بالای جدول یا کنار جدول متغیر های غیر اساسی گفته می شود مانند

(1 ، 2 ، 3 یا A،B، C)

گام سوم : هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه هایی که دارای علامت مثبت هستند با هم جمع و از مجموع هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه هایی که دارای علامت مثبت هستند با هم جمع واز مجموع هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه هایی که دارای علامت منفی هستند کم کنید عدد حاصل هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه هایی که دارای علامت منفی هستند کم کنید وعدد حاصل ارزش خانه خالی انتخابی را نشان می دهد.

نکـتـه : گام چهارم : ارزش تمام خانه های خاله را طبق گام فوق بدست آورید ، اگر گزارش تمام خانه های خالی غیر منفی بود به جواب بهینه رسیده اید . فزونی عرضه کل از تقاضای کل : وقتی مقدار عرضه کل از تقاضای کل بیشتر باشد ($\sum si > \sum \mathrm{di}$) باید یک ستون تقاضای مجازی با میزان تقاضایی معادل $\sum si > \sum \mathrm{di}$ به جدول حمل ونقل اضافه شود ، هزینه های حمل هر واحد کالا برای این ستون مجازی چون واقعا کالایی حمل نمی شود صفر منظور می گردد این روال همچنین برای سطر .

بهبود جواب : در قسمت قبل آموختیم که چگونه باید به جواب موجه ابتدایی برسیم مستقیما به جواب بهینه نمی رسند حتی اگر این چنین باشد تضمینی در کار نیست حال در اینقسمت می آموزیم که چگونه ارزیابی کنیم متغیر غیر اساسی ، انتخاب متغیر ورودی ، ومتغیر اساسی خروجی ومحاسبه جواب بهینه (بهبود یافته) .

در غیر اینصورت این جدول بهینه نیست وبرای بهبود به گام آخر(بعدی) می رویم .

گام پنجم : انتخاب متغیر ورودی : آن خانه خالی که دارای منفی ترین ارزش محاسبه شده است را انتخاب کنید ومتغیر مربوط به خانه را متغیر ورودی بنامید .

گام ششم : انتخاب متغیر خروجی : مسیر پله سنگ گام 5 را در نظر بگیرید واز میان تمام خانه هایی که راس مسیر پله سنگ در آن ها قرار گرفته ودارای علامت منفی هستند خانه ای را انتخاب کنید که کمترین متغیر اساسی (کمترین عدد داخلی دایره ها) را دارد متغیر مربوط به این خانه ، متغیر خروجی است .

گام هفتم : بدست آوردن جدول جدید : یک جدول جدید رسم کنید ومقدار خانه انتخابی در گام **6** (متغیرخروجی) را از مقدار خانه هایی که دارای علامت منفی هستند کم وبه خانه هایی که دارای علامت مثبت هستند اضافه کنید . مقدار سایز خانه هایی که راس پله سنگ در آن ها قرار نگرفته بدون تغییر به جدول منتقل کنید وبه گام اول بروید .

روش پله سنگ : این روش رویه ای را پی می گیرد که با عملیاتی پی در پی از یک جواب موجه ابتدایی شروع وجواب بهینه را پیدا می کند به طوری که در هر قدم اقلامی از یک مسیر که قبلا ارسال ویکی از مسیرهایی را که در حال حاضر مورد استفاده قرار داده شده است حذف می کند به طوری که در عین موجه ماندن جواب بهبودی در آن حاصل می شود این رویه وقتی متوقف می شود که دیگر مسیری که موجب بهبود جواب شود پیدا نشود . برای استفاده از روش پله سنگ ابتدا به یکی از روشهای گفته شده جواب موجه ابتدایی را می یابیم وسپس آلگوریتم پله سنگ را پیش می گیریم .

مثال 6 : جواب بهینه مثال زیر را از روش پله سنگ بیابید .

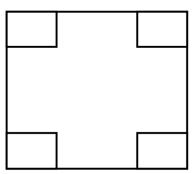
مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	جریمه 1	جریمه 2	جریمه 3	جریمه 4
1	**2.2**	**2.1** 40	**2.4** 210	**250**	**0.1**	**0.3**	**2.4**	–
2	**1.8** 190	**1.9**	**2.1** 110	**300**	**0.1**	**0.2**	**2.1**	–
3	**3**	**3.2** 200	**3.6**	**200**	**0.2**	**0.4**	–	–
تقاضا	**190**	**240**	**320**	**750**				
جریمه 1	**0.4**	**0.2**	**0.3**					
جریمه 2	–	**0.2**	**0.3**					
جریمه 3	–	**0.2**	**0.3**					
جریمه 4	–	–	**0.3**					

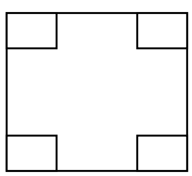
Min Z = 1801

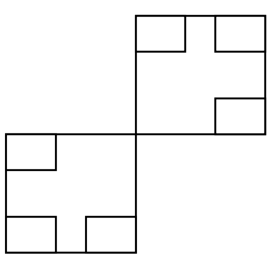
مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	2.2	2.1 40	2.4 210	250
2	1.8 190	1.9	2.1 110	300
3	3	3.2 200	3.6	200
تقاضا	190	240	320	750

برای خانه های خالی :

(1 – A) =  (2.2+2.1) – (1.8+2.4)= +0.1 ✓

(2 – B)=  (1.9+2.4) – (2.1+2.1)= + 0.1 ✓

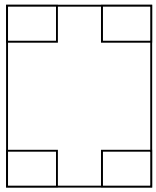
(3 – C)=  (2.1+3.6) – (3.2+2.4)= + 0.1 ✓

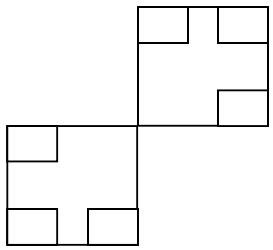
(3 – A)=  (3+2.1+2.1) – (1.8+3.2+2.4)= - 0.2

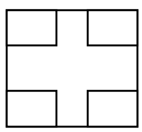
مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	2.2	2.1 40	2.4 210	250
2	1.8 190	1.9	2.1 110	300
3	3 ورودی	3.2 200	3.6	200
تقاضا	190	240	320	750

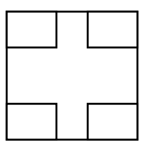
مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	2.2	2.1 230	2.4 20	250
2	1.8	1.9	2.1 300	300
3	3 190	3.2 10	3.6	200
تقاضا	190	240	320	750

برای خانه های خالی :

(1 – A) =  **(2.2+3.2) – (2.1+3)= +0.3** ✓

(2 – A)=  **(1.8+3.2+2.4) – (3+2.1+2.1)=+ 0.2** ✓

(3 – B)=  **(1.9+2.4) – (2.1+2.1)= + 0.1** ✓

(3 – C)=  **(3.6+2.1) – (3.2+2.4)= + 0.1** ✓

جدول بهینه

(1 ☞B) = 230

(1 ☞C) = 20

(2 ☞C) = 300

(3 ☞A) = 190

(3 ☞B) = 10

Min Z = 1763 کمترین هزینه حمل و نقل

تمرین 4 : جواب آغازین را با روش وگل و جواب بهینه را با پله سنگ بدست آورید .

مقصد / مبدأ	A	B	C	D	عرضه	جریمه 1	جریمه 2	جریمه 3	جریمه 4	جریمه 5
1	3	6	8	4	20					
2	6	1	2	5	18					
3	7	8	3	9	17					
4 مجازی										
تقاضا	15	19	13	18	65					
جریمه 1										
جریمه 2										
جریمه 3										
جریمه 4										
جریمه 5										

مقصد / مبدأ	A	B	C	D	عرضه
1	3	6	8	4	20
2	6	1	2	5	18
3	7	8	3	9	17
4 مجازی	0	0	0	0	10
تقاضا	15	19	13	18	65

( )=

( )=

( )=

( )=

( )=

( )=

مقصد / مبدأ	A	B	C	D	عرضه
1	3	6	8	4	20
2	6	1	2	5	18
3	7	8	3	9	17
4 مجازی	0	0	0	0	10
تقاضا	15	19	13	18	65

(   )=

(   )=

(   )=

(   )=

(   )=

(   )=

ما خوب یاد گرفتیم در آسمان مثل پرندگان باشیم و در آب مثل ماهیها اما هنوز یاد نگرفتیم روی زمین چگونه زندگی کنیم .

(چارلی چاپلین)

روش توزیع تبدیل شده برای یافتن جواب بهینه :

این روش را u,v روش مضارب سطر و ستون می گویند ، در این روش یک ضریب ui برای سطرها و یک ضریب Vj برای ستون ها در نظر می گیریم ، و سپس با استفاده از الگوریتم زیر مسائل را حل می کنیم .

گام اول : با استفاده از یکی از روشهای گفته شده یک جواب موجه ابتدایی را محاسبه می کنیم .

گام دوم : از رابطهٔ cij=ui+vj استفاده و بر اساس خانه های پُر برای هر vj,ui عددی را نسبت می دهیم. (با فرض $u_1 = 0$)

گام سوم : با بکار گیری اطلاعات بدست آمد (منظور u_i و v_j است) در گام قبل ارزش خانه خالی را با استفاده از cij-ui-vj محاسبه کنید ، اگر ارزش کلیه خانه های خالی غیر منفی بود به جواب بهینه رسیده اید در غیر این صورت به گام بعد بروید **.≤** cij-ui-vj ≥ 0 **(X≥0)**

گام چهارم : آن خانه خالی که دارای منفی ترین ارزش است را مشخص کنید ، متغیر مربوط به آن متغیر ورودی است .

گام پنجم : برای خانه خالی انتخاب شده یک مسیر پله سنگ رسم کنید و از میان خانه های خالی که دارای علامت منفی هستند کوچکترین را انتخاب به مثبت ها اضافه و از منفی ها کم کنید . **مثال 6:**

مقصد / مبدأ	1	2	3	عرضه	جریمه 1	جریمه 2	جریمه 3	جریمه 4
1	**2.2**	**2.1** 40	**2.4** 210	**250**	**0.1**	**0.3**	**0.3**	**2.4**
2	**1.8** 190	**1.9**	**2.1** 110	**300**	**0.1**	**0.2**	**0.2**	**2.1**
3	**3**	**3.2** 200	**3.6**	**200**	**0.2**	**0.4**	**-**	**-**
تقاضا	**190**	**240**	**320**	**750**				

	1	2	3
جریمه 1	**0.4**	**0.2**	**0.3**
جریمه 2	**-**	**0.2**	**0.3**
جریمه 3	**-**	**0.2**	**0.3**
جریمه 4	**-**	**-**	**0.3**

مقصد / مبدأ	1	2	3	عرضه	ui
1	2.2	2.1 40	2.4 210	250	$U_1 = 0$
2	1.8 190	1.9	2.1 110	300	$U_2 = -0.3$
3	3	3.2 200	3.6	200	$U_3 = 1.1$
تقاضا	190	240	320	750	——
vj	$V_1 = 2.1$	$V_2 = 2.1$	$V_3 = 2.4$	——	——

فرض **u_1=0** ، برای خانه های **پُر** **<u>Cij = ui + vj</u>**

(1-2)→$C_{12}=u_1+v_2 \Longrightarrow 2.1=0+V_2 \Longrightarrow v_2=2.1$ ✓

(1-3)→$C_{13}=u_1+v_3 \Longrightarrow 2.4=0+V_3 \Longrightarrow v_3=2.4$ ✓

(2-1)→$C_{21}=u_2+v_1 \Longrightarrow 1.8=-0.3+V_1 \Longrightarrow v_1=2.1$ ✓

(2-3)→$C_{23}=u_2+v_3 \Longrightarrow 2.1=u_2+2.4 \Longrightarrow u_2=-0.3$

(3-2)→$C_{32}=u_3+v_2 \Longrightarrow 3.2=u_3+2.1 \Longrightarrow u_3=1.1$ ✓

برای خانه های **خالی** **<u>Cij – ui – vj</u>**

(1-1)→$c_{11}-u_1-v_1$ = 2/2 – 0 – 2/1 = 0/1

(2-2) → $c_{22}-u_2-v_2$ = 1/9 – (-0/3)-2/1 = 0/1

(3-1) → $c_{31}-u_3-v_1$ = 3 – 1/1 – 2/1 = - 0/2 ✓

(3-3) → $c_{33}-u_3-v_3$ = 3/6 – 1/1 – 2/4 = 0/1

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	ui
1	2.2	2.1 230	2.4 20	250	$U_1 = 0$
2	1.8	1.9	2.1 300	300	$U_2 = 0.3$
3	3 190	3.2 10	3.6	200	$U_3 = 1.1$
تقاضا	190	240	320	750	
vj	$V_1 = 1.9$	$V_2 = 2.1$	$V_3 = 2.4$		

فرض **u_1=0** ، برای خانه های **پُر** <u>**Cij = ui + vj**</u>

(1-2) → $u_1+v_2=2/1$ ⇨ $0 + v_2 = 2/1$ ⇨ $v_2 = 2/1$

(1-3) → $u_1 + v_3 = 2/4$ ⇨ $0 + v_3 = 2/4$ ⇨ $v_3 = 2/4$

(2-3) → $u_2 + v_3 = 2/1$ ⇨ $u_2 = 2/1 – 2/4$ ⇨ $u_2 = 0/3$

(3-1) → $u_3 + v_1 = 3$ ⇨ $v_1 = 3 – 1/1$ ⇨ $v_1 = 1/9$

(3-2) → $u_3 + v_3 = 3/2$ ⇨ $v_3 = 3/2 – 2/1$ ⇨ $u_3 = 1/1$

برای خانه های **خالی** <u>**Cij – ui – vj**</u>

(1-1) → $c_{11} – u_1 – v_1 = 2/2 – 0 -1/9 = 0/3$

(2-1) → $c_{21} – u_2 – v_1 = 1/8 – (-0/3)-1/9 = 0/2$

(2-2) → $c_{22} – u_2 – v_2 = 1/9 – (0/3) – 2/1 = 0/1$

(3-3) → $c_{33} – u_3 – v_3 = 3/6 – 1/1 – 2/4 =0/1$

Z= (230×2/1) + (20×2/4) + (300×2/1) + (190×3) + (10× 3/2) = Z = 1763

$x^*_{12} = 230$ x^*_{13}=20 $x^*_{23} = 300$ $x^*_{31} = 190$ $x^*_{32} = 10$

مسئله با تابع هدف حداکثر : مسئله حداکثر کردن را می توان با تغییرات جزئی به مسئله حداقل کردن تبدیل کرد و با همان روشهای قبلی حل کرد . این کار با ضرب کردن تابع هدف در منفی یـک(**1**–) میسر می شود .

$$max^z = \sum_i \sum_j cij.xij$$

$$s.t \begin{cases} \sum_j xij = si \\ \sum_i xij = d_j \end{cases}$$

$Xij \geq 0$

$$max - z = -\sum_i \sum_j cij.xij$$

$$s.t \begin{cases} \sum_j xij = si \\ \sum_i xij = d_j \end{cases}$$

$Xij \geq 0$

برای خانه های پر: $ui + vj = - cij$

برای خانه های خالی (شرط بهینگی): $- cij - (ui + vj) \geq 0$

مثال 7 : اگر سود حمل هر 1000 لیتر بنزین از سه پالایشگاه به چهار پمپ بنزین مطابق جدول زیر باشد بهترین شیوع توزیع با هدف حداکثر کردن سود را بیابید . (جدول آغازین را به روش گوشه شمال غربی حل کنید.)

پمپ / پالایشگاه	A	B	C	D	عرضه
1	80	70	60	60	8
2	50	70	80	70	10
3	70	50	80	60	5
تقاضا	5	4	6	4	23

حل : اعداد جدول را در منفی یک ضرب کنید.

پمپ / پالایشگاه	A	B	C	D	ستون مجازی E	عرضه	Ui
1	-80 5	-70 3	-60	-60	0	8	0
2	-50	-70 1	-80 6	-70 3	0	10	0
3	-70	-50	-80	-60 1	0 4	5	10
تقاضا	5	4	6	4	4	23	
Vj	-80	-70	-80	-70	-10		

$\underline{ui + vj = - cij}$ برای خانه های پر :

(1 -A) → $U_1 + V_1 = -C_{11}$ → $0 + V_1 = -80$ → $V_1 = -80$

(1 - B) → $U_1 + V_2 = -C_{12}$ → $0 + V_2 = -70$ → $V_2 = -70$

(2 – B) → $U_2 + V_2 = -C_{22}$ → $U_2 + (-70) = -70$ → $U_2 = 0$

(2 – C) → $U_2 + V_3 = -C_{23}$ → $0 + V_3 = -80$ → $V_3 = -80$

(2 – D) → → $U_2 + V_4 = -C_{24}$ → $0 + V_4 = -70$ → $V_4 = -70$

(3 – D) → $U_3 + V_4 = -C_{34}$ → $U_3 + (-70) = -60$ → $U_3 = +10$

(3 - E) → $U_3 + V_5 = -C_{35}$ → $10 + V_5 = 0$ → $V_5 = -10$

$\underline{- cij - (ui + vj) \geq 0}$ برای خانه های خالی :

(2 – A) → $-50 - \big(0 + (-80)\big) = 30$ ✓

(3 – A) → $-70 - \big(10 + (-80)\big) = 0$ ✓

(3 – B) → $-50 - \big(10 + (-70)\big) = 10$ ✓

(1 – C) → -60 – (0 + (-80)) = 20 ✓

(3 – C) → -80 – (10 + (-80)) = -10 ❖

(1 – D) → -60 – (0 + (-70)) = 10 ✓

(1 – E) → -10 – (0 + (-10)) = 0 ✓

(2 – E) → -10 – (0 + (-10)) = 0 ✓

پمپ / پالایشگاه	A	B	C	D	ستون مجازی E	عرضه	Ui
1	-80 5	-70 3	-60	-60	0	8	0
2	-50	-70 1	-80 5	-70 4	0	10	0
3	-70	-50	-80 1	-60	0 4	5	0
تقاضا	5	4	6	4	4	23	
Vj	-80	-70	-80	-70	0		

$\underline{ui + vj = - cij}$ برای خانه های پر :

(1 -A) → $U_1 + V_1 = -C_{11}$ → $0 + V_1 = -80$ → $V_1 = -80$

(1 - B) → $U_1 + V_2 = -C_{12}$ → $0 + V_2 = -70$ → $V_2 = -70$

(2 – B) → $U_2 + V_2 = -C_{22}$ → $U_2 + (-70) = -70$ → $U_2 = 0$

(2 – C) → $U_2 + V_3 = -C_{23}$ → $0 + V_3 = -80$ → $V_3 = -80$

(2 – D) → → $U_2 + V_4 = -C_{24}$ → $0 + V_4 = -70$ → $V_4 = -70$

(3 – C) → $U_3 + V_3 = -C_{33}$ → $U_3 + (-80) = -80$ → $U_3 = 0$

(3 - E) → $U_3 + V_5 = -C_{35}$ → $0 + V_5 = 0$ → $V_5 = 0$

$\underline{- cij - (ui + vj) \geq 0}$ برای خانه های خالی :

(1 – C) → $-60 - \big(0 + (-80)\big) = 20$ ✓

(1– D) → $-60 - \big(0 + (-70)\big) = 10$ ✓

(1 – E) → $0 - \big(0 + (-0)\big) = 0$ ✓

(2 – A) → -50 – (0 –+ (-80)) = 30 ✓

(2 – E) → 0 – (0 + (-0)) = 0 ✓

(3 – A) → -70 – (0 + (-80)) = 10 ✓

(3 – B) → -50 – (0 + (-70)) = 20 ✓

(3 – D) → -60 – (0 + (-70)) = 10 ✓

Z^* = (1-A)* , (1-B)* , (2-B)*, (2-C)*, (2-D)*, (3-C)*, (3-E)*

Z^* = (-80×5)+(-70×3)+(-70×1)+(-80×5)+(70×4)+(-80×1)+(4×0)= -1670

تمرین 5 : در صورتی که سود حمل هر واحد کالا از سه شهر 1 و 2 و 3 به سه شهر دیگر و مقدار کالای مورد نیاز هر شهر مطابق جدول زیر باشد به منظور حداکثر کردن سود نحوهٔ بهینه توزیع کالا را بنویسید

(جدول آغازین وگل باشد)

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
1	4.8	3.9	5.6	250
2	5	3.9	5.7	300
3	4.5	3.3	4.9	200
تقاضا	190	240	320	750

حل: با نظر بر اینکه در 1- ضرب شود .

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	جریمه 1	جریمه 2	جریمه 3
1	4.8	3.9	5.6	250			
2	5	3.9	5.7	300			
3	4.5	3.3	4.9	200			
تقاضا	190	240	320	750			
جریمه 1							
جریمه 2							
جریمه 3							

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	Ui
1	4.8	3.9	5.6	250	$U_1 = 0$
2	5	3.9	5.7	300	$U_2 =$
3	4.5	3.3	4.9	200	$U_3 =$
تقاضا	190	240	320	750	
vj	$V_1 =$	$V_2 =$	$V_3 =$		

برای خانه های پر: با فرض اینکه $U_1=0$ **$Ui + Vj = - Cij$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

برای خانه های خالی : **$- Cij - (Ui + Vj) \geq 0$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	ui
1	4.8	3.9	5.6	250	$U_1=0$
2	5	3.9	5.7	300	$U_2=$
3	4.5	3.3	4.9	200	$U_3=$
تقاضا	190	240	320	750	
Vj	$V_1=$	$V_2=$	$V_3=$		

برای خانه های پر: با فرض اینکه $U_1=0$ **$Ui + Vj = - Cij$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

برای خانه های خالی **$-Cij-(ui+vj) \geq 0$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	ui
1	4.8	3.9	5.6	250	$U_1=0$
2	5	3.9	5.7	300	$U_2=$
3	4.5	3.3	4.9	200	$U_3=$
تقاضا	190	240	320	750	
Vj	$V_1=$	$V_2=$	$V_3=$		

برای خانه های پر: با فرض اینکه $U_1=0$ **$Ui + Vj = - Cij$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

برای خانه های خالی **$-Cij-(ui+vj) \geq 0$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه	ui
1	4.8	3.9	5.6	250	$U_1=0$
2	5	3.9	5.7	300	$U_2=$
3	4.5	3.3	4.9	200	$U_3=$
تقاضا	190	240	320	750	
Vj	$V_1=$	$V_2=$	$V_3=$		

برای خانه های پر: با فرض اینکه $U_1=0$ **$Ui + Vj = - Cij$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

برای خانه های خالی **$-Cij-(ui+vj) \geq 0$**

( ) →

( ) →

( ) →

( ) →

حالت تبهگن در مدل حمل و نقل :

این وضعیت مشکل چندانی در حالت عملی برای حل مسئله به وجود نمی آورد ، نشانه حالت تبهگن وجود مقدار صفر برای یک متغیر اساسی است و به عبارت دیگر داشتن یک خانه پُر با مقدار صفر است.

حالت تبهگن نیز به دو صورت رخ می دهد :

الف) در مرحله بدست آوردن جواب موجه ابتدایی

ب) در مرحله بهبود جواب :

هر گاه در مسیر پله سنگ رسم شده بیش از یک خانه با رأس با علامت منفی که دارای کمترین مقدار باشد وجود داشته باشد این حالت را به وجود می آورد .

مثال 8 : جدول حمل و نقل زیر را که جواب ابتدایی آن به روش گوشه شمال غربی بدست آمده را حل کنید.

الف) روش گوشه شمال غربی

یعنی تبهگن

مقصد / مبدأ	1	2	3	عرضه	u_i
1	8 150	7 0	4	150	$u_1=0$
2	2	3 170	8 30	200	$u_2=-4$
3	2	4	9 70	70	$u_3=-3$
تقاضا	150	170	100	420	
vj	$V_1=8$	$V_2=7$	$V_3=12$		

ب) بهینه بودن جدول زیر را بررسی کنید .

مقصد / مبدأ	1	2	3	عرضه	u_i
1	6 50	8	2	50	$u_1=0$
2	1 100	4 50	9	150	$5u_2=-5$
3	10	75 75	3 50	125	$u_3=-7$
تقاضا	150	125	50	325	
vj	$V_1=6$	$V_2=9$	$V_3=10$		

جواب بهینه چند گانه :

در مسئله برنامه ریزی حطی وقتی که یک یا چند متغیر غیر اساسی در سطر صفر جدول بهینه مقدار صفر داشت مسئله دارای جواب بهینه چند گانه است .

در مدل های حمل و نقل نیز هر گاه در جدول نهایی یک یا چند متغیر غیر اساسی دارای هزینه نهایی صفر یا به عبارت دیگر ارزش یک خانه خالی ($c_{ij} - u_i - v_j = 0$) شود مسئله دارای جواب بهینه چند گانه است ، (اگر همان خانه صفر را در پله سنگ در نظر بگیریم جواب بهینه دیگری بدست می آید)

فصل دوم : مدل های تخصیص

مساله تخصیص و برنامه ریزی خطی :

مدل تخصیص یکی از انواع خاص مدل حمل و نقل است در این مدل هر مبدأ تنها عرضه کننده یک واحد و هر مقصد فقط متقاضی یک واحد است . تخصیص کارمند ماشین یا دوره ای از زمان برای انجام یک شغل ، وظیفه یا واقعه ، نمونه ای از مسائل تخصیص است ، هزینه تخصیص با Cij نمایش داده می شود ، هدف انجام تخصیص با صرف حداقل هزینه است ، مخارج تخصیص m شغل به صورت n فرد به صورت زیر می باشد .

شغل m / مزد n	1	2	...	n
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}
			...	⋮
N	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nn}

روش های گوناگونی برای حل مسئله تخصیص وجود دارد که بعضی از آنها به شرح زیر است :

1. روش شمارش کامل : مسئله تخصیص مسئله ای است که در آن عموماً تعداد افراد با تعداد مشاغل برابر و مساوی n فرض می شود . یک راه برای پیدا کردن بهترین شیوه تخصیص فهرست کردن کلیه حالات ممکن تخصیص افراد به مشاغل و پیدا کردن بهترین شیوه بعد از مفایسه کلیه حالات دیگر است.

کل حالات ← 2!=2

شغل / حرفه	A	B
1	32	40
2	41	35

حالت اول : $(1 \to A)$ 32

$(2 \to B)$ $\frac{35}{67}$ ❈ ✓

حالت دوم : $(2 \to A)$ 41

$(1 \to B)$ $\frac{40}{81}$

حرفه \ شغل	A	B	C
1	4	7	11
2	10	5	9
3	6	8	10

$1 \to A$ 4 $2 \to B$ 5 $3 \to C$ $\frac{10}{19}$ ❈ ✓ ①	$1 \to B$ 7 $2 \to A$ 9 $3 \to C$ $\frac{6}{22}$ ②
$1 \to A$ 4 $3 \to B$ 8 $2 \to C$ $\frac{9}{21}$ ③	$1 \to C$ 11 $2 \to A$ 10 $3 \to B$ $\frac{8}{29}$ ④
$1 \to B$ 7 $2 \to A$ 10 $3 \to C$ $\frac{10}{27}$ ⑤	$1 \to C$ 11 $2 \to B$ 5 $3 \to A$ $\frac{6}{22}$ ⑥

نکته : این شیوه در خیلی موارد به دلیل وجود تعداد زیاد حالات تخصیص غیر استفاده است ، تعداد حالات ممکن برای تخصیص n فرد به m شغل برابر با !n است و تعداد حالات ممکن برای تخصیص 10 فرد به 10 شغل برابر است با 3/628/800 حالت که کارایی این روش را می کاهد .

استفاده از برنامه ریزی خطی عدد صحیح :

در مدل تخصیص **m** کار باید به عهده **n** فرد قرار گیرد هزینه انجام شغل **j** اُم توسط فرد **i** اُم با **Cij** نشان داده می شود .

مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح این مسئله به صورت زیر می باشد :

$$xij\begin{cases} \mathbf{1} & \text{فرد } \boldsymbol{i} \text{ اُم کار } \boldsymbol{j} \text{ اُم را انجام دهد} \\ \mathbf{0} & \text{فرد } \boldsymbol{i} \text{ اُم کار } \boldsymbol{j} \text{ اُم را انجام ندهد} \end{cases}$$

چون هرفرد یک شغل را انجام می دهد داریم :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cij.Xij$$

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} xij = 1 & \text{که } \boldsymbol{i} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}) \\ \sum_{i=1}^{n} xij = 1 & \text{که } \boldsymbol{i} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}) \end{cases}$$

Xij = **1 یا صفر**

مدل فوق همان مسئله حمل و نقل است که در آن m=n و تمام مقادیر عرضه و تقاضا مساوی 1 است .

روش حمل و نقل :

مسئله تخصیص را می توان با الگوریتم حمل و نقل حل کرد . استفاده از روش حمل و نقل در این مورد چندان مفید نیست زیرا هم متغیر **xij** با مقدار یک نیازمندی یک سطر و یک ستون را همزمان برآورده می سازد ، بنابراین به جای 2n-1 متغیر اساسی با مقدار غیر صفر **n** متغیر اساسی با مقدار غیر صفر وجود دارد . و در نتیجه **n-1** متغیر اساسی بتهگون وجود خواهد داشت ، در ادامه به توضیح چند روش برای حل مدل تخصیص می پردازیم :

1. **برنامه ریزی خطی** ⟵ مدل خوبی نیست ، زمان بر و شلوغ است .
2. **مدل حمل و نقل** ⟵ مدل خوبی نیست ، صفرش زیاد است .
3. **مجارستانی** ⟵ بهترین روش است .
4. **انشعاب و تحریر**

برای توضیح این روشها از مثال زیر استفاده می کنیم :

مثال 9 : برای تعیین مدیر 5 کارخانه در نقاط مختلف کشور که تحت پوشش یک سازمان بزرگ صنعتی هستند 5 مدیر کاندید شده اند ، حقوق درخواستی هر مدیر در کارخانه های مختلف مطابق جدول زیر است . فرض کنید امکان تخصیص هر مدیر به هر کارخانه وجود دارد .

هدف تخصیص مدیران به کارخانه ها با حداقل هزینه پرداخت حقوق است .

کارخانه / مدیران	1	2	3	4	5	عرضه
1	2	4	5	1	4	1
2	4	7	8	11	7	1
3	3	9	8	10	5	1
4	1	3	5	1	4	1
5	7	1	2	1	2	1
تقاضا	1	1	1	1	1	

1. **برنامه ریزی خطی :** روش اول برنامه ریزی خطی است که در این روش مدلی ساخته خواهد شد با یک تابع هدف با **25** جمله و محدودیتهای بالغ بر **10** ، پس این روش نیز روشی مناسب برای مسئله تخصیص نیست لذا از آن صرف نظر می کنیم .

2. **مدل حمل و نقل** : حالت دوم مسئله تخصیص مدل حمل و نقل است ، از آنجا که برای انجام هر شغل فقط یک فرد کافیست لذا تمام اعداد عرضه و تقاضای آن یک است ، لذا اگر جواب ابتدایی را با استفاده از روش گوشه شمال غربی بدست آوریم **4** متغیر اساسی تبهگن وجود دارد که با الگوریتم های گفته شده قابل حل می باشد .

کارخانه / مدیران	1	2	3	4	5	عرضه
1	2 1	4	5	1	4	1
2	4 0	7 1	8	11	7	1
3	3	9 0	8 1	10	5	1
4	1	3	5 0	1 1	4	1
5	7	1	2	1 0	2 1	1
تقاضا	1	1	1	1	1	

روش مجارستانی : برای حل مسئله تخصیص اساس این روش براین قضیه بنا نهاده شده است ، اگر تمام اعداد سطر یا ستون یک مسئله تخصیص به یک میزان افزایش یا کاهش یابند جواب بهینه مسئله تخصیص جدید معادل همان مسئله اول خواهد بود . الگوریتم این روش بر اساس خاصیت ماتریس ها استوار است که داریم :

گام اول : برای هر سطر ماتریس هزینه کوچکترین عدد در هر سطر را از تمام اعداد آن سطر کم کنید سپس کوچکترین عدد در هر ستون ماتریس حاصل را از تمام اعداد آن ستون کم کنید ، ماتریس نتیجه را ماتریس هزینه های کاهش یافته یا جدول هزینه فرصتی بنامیم .

گام دوم : حداقل تعداد خطوطی که تمام صفر ها را می پوشاند رسم کنید (پوشش می کنیم) که این خطوط حداقل باشد (منحصر به فرد نیست)

خطوط پوشش : خطوطی افقی یا عمودی هستند اگر تعداد خطوط پوشش n باشد به جواب بهینه رسیده اید توقف کنید در غیر صورت به گام سوم بروید .

گام سوم : یک ماتریس هزینه های کاهش یافته جدید به طریق زیر ایجاد کنید ، کوچکترین عددی را انتخاب کنید که در ماتریس گام دوم روی آن خط کشیده نشده است این عدد را از تمام اعدادی که روی آنها خط کشیده شده است کم و به اعدادی که در محل تقاطع خطوط هستند اضافه کنید و به گام دوم بروید .

گام چهارم : اکنون برای تخصیص مشاغل به افراد از روی جدول بهینه به صورت زیر عمل می کنیم ، از صفرها **5** تای آنها را انتخاب می کنیم به طوری که خطوط عمود بر این صفرها با صفرهای دیگر برخورد نکند ، بعد از انتخاب صفرها اعداد نظیر صفرها در جدول اولیه را استخراج می کنیم و سپس با هم جمع می کنیم عدد حاصل کمترین هزینه ی تخصیص مشاغل به افراد است .

نکـتـه : منظور از **5** تا همان **N** می باشد در این مثال **5** تا می باشد

مثال 10 : مسئله زیر را از روش مجارستانی حل کنید . (ابتدا سطر بعد ستون)

	1	2	3	4	5
1	~~2~~ 1	4 3	~~5~~ 4	~~1~~ 0	4 3
2	4 0	~~7~~ 3	~~8~~ 4	~~11~~ 7	~~7~~ 3
3	~~3~~ 0	~~9~~ 6	~~8~~ 5	~~10~~ 7	~~5~~ 2
4	~~1~~ 0	~~3~~ 2	~~5~~ 4	~~1~~ 0	4 3
5	~~7~~ 6	~~1~~ 0	~~2~~ 1	~~1~~ 0	~~2~~ 1

	1	2	3	4	5
1	1	3	4 3	0	~~3~~ 1
2	0	3	~~4~~ 3	7	~~3~~ 2
3	0	6	~~5~~ 4	7	~~2~~ 1
4	0	2	4 3	0	~~3~~ 2
5	6	0	~~1~~ 0	0	~~1~~ 0

	1	2	3	4	5
1	1	~~3~~ 2	~~3~~ 2	0	~~2~~ 1
2	0	~~3~~ 2	~~3~~ 2	7	~~2~~ 1
3	0	~~6~~ 5	4 3	7	~~1~~ 0
4	0	~~2~~ 1	~~3~~ 2	0	~~2~~ 1
5	6	0	0	0	0
	6+1			0+1	

	1	2	3	4	5
1	1	~~2~~ 1	~~2~~ 1	0	1
2	0	~~2~~ 1	~~2~~ 1	7	1
3	0	~~5~~ 4	~~3~~ 2	7	0
4	0	~~1~~ 0	~~2~~ 1	0	1
5	7	0	0	1	0
	7+1			1+1	0+1

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	1
2	0	1	1	7	1
3	0	4	2	7	0
4	0	0	1	0	1
5	8	0	0	2	1
	7+1			1+1	0+1

Min Z = 4+3+2+1+5 = 15

مثال11 : مربی یک تیم شنا مایل است شناگران خود را برای شرکت در یک مسابقه 200 متری امدادی مختلط معین کند ، چون تخصصی اکثر شناگران خوب منحصر به یک رشته نیست لذا نمی توان به سادگی مشخص کد که کدام شناگر در کدامیک از 4 رشته مسابقه امدادی شرکت کند ، اگر رکورد آنها در جدول زیر آمده باشد مسئله را به صورت تخصیص حل کنید ونشان دهید که هر کدام در چه رشته ای انتخاب می شود؟

شناگر / رشته	A	B	C	D
کرال پشت	~~37.7~~ 4.8	~~32.9~~ 0	~~33.8~~ 0.9	~~37~~ 4.1
کرال سینه	~~43.4~~ 10.3	~~33.1~~ 0	~~42.2~~ 9.1	~~34.7~~ 1.6
پروانه	~~33.3~~ 4.8	~~28.5~~ 0	~~38.9~~ 10.4	~~34~~ 5.5
غورباقه	~~29.2~~ 2.8	~~26.4~~ 0	~~29.6~~ 3.2	~~28.5~~ 2.1

شناگر / رشته	A	B	C	D
کرال پشت	~~4.8~~ ~~2~~	0	~~0.9~~ 0	~~4.1~~ 2.5
کرال سینه	~~10.3~~ 7.5	0	~~9.1~~ 8.2	~~1.6~~ 0
پروانه	~~4.8~~ 2	0	~~10.4~~ 9.5	~~5.5~~ 3.9
غورباقه	~~2.8~~ 0	0	~~3.2~~ 2.3	~~2.1~~ 0.5

رشته \ شناگر	A	B	C	D
کرال پشت	2	0	0	2/5
کرال سینه	7/5	0	8/2	0
پروانه	2	0	9/5	3/9
غورباقه	0	0	2/3	0/5

$Minz_1$=29.2+28.5+33.8+34.7

$Minz_1$=126.5

تمرین 6 : به منظور بازرسی شعبات بانکهای 40 استان مختلف از 4 مرکز بازرسی می شود که در استانهای دیگر قرار دارند استفاده می شود ، هزینه روانه کردن هر گروه بازرسی هر استان معادل جدول زیر است .

	1	2	3	4
1	30	30	75	0
2	80	80	60	70
3	45	35	30	85
4	65	40	70	65

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

MinZ=

تمرین 7 : چهار شرکت ساختمانی **1 و 2 و 3 و 4** برای انجام پروژه ی **A B C D** اعلام آمادگی کردند هزینه های زیر را پیشنهاد نمودند به منظور حداقا نمودن هزینه های ساخت **4** پروژه چه طرحی را پیشنهاد می کنید ؟ مهندسین!

پروژه / ش ساختمانی	A	B	C	D
1	17	12	11	15
2	15	13	27	10
3	9	12	7	21
4	22	21	10	13

پروژه / ش ساختمانی	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

پروژه / ش ساختمانی	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

MinZ=

مسائل حد اکثر کردن : حالتی را در نظر بگیرید که نتیجه هر تخصیص ایجاد سود باشد ، مثلا فرض کنید تعدادی فروشنده به چند منطقه فروش اختصاص یابد تاثیر وجود هر فروشنده بر بازارفروش موجب ایجاد سود می شود که در جدول زیر آمده است .

حل مسئله تخصیص با استفاده از روش مجارستانی برای مسائل حداقل کردن تداعی شده است در صورتی که در اینجا ما به دنبال حداکثر کردن کردن هستیم یکی از راه هایی که می توان ارائه کرد این است که تمام اعداد هر ستون از بزرگترین عدد آن ستون کسر شود .در این صورت جدول بدست آمد ه را با استفاده از روش مجارستانی حل می کنیم .

نکته : حداقل کردن کوچکترین را از همه کم می کردیم ، در حداکثر کردن همه را از بزگترین کم می کنیم و طبق روال قبل حل میکنیم.

فروشنده	**1**	**2**	**3**	تعداد مورد نیاز
A	**40**	**30**	**20**	**1**
B	**16**	**28**	**22**	**1**
C	**12**	**16**	**20**	**1**
D	**25**	**24**	**27**	**1**
تعداد مورد نیاز	**1**	**1**	**1**	**4**

حل:

فروشنده	**1**	**2**	**3**	**4**	تعداد مورد نیاز
A	~~40~~ **0**	~~30~~ **0**	~~20~~ **7**	0	**1**
B	~~16~~ **24**	~~28~~ **2**	~~22~~ **5**	0	**1**
C	~~12~~ **28**	~~16~~ **14**	~~20~~ **7**	0	**1**
D	~~25~~ **15**	~~24~~ **6**	~~27~~ **0**	0	**1**
تعداد مورد نیاز	**1**	**1**	**1**	**1**	

فروشنده	1	2	3	4	تعداد مورد نیاز
A	0	0	7	0 0+2	1
B	~~24~~ 22	~~2~~ 0	~~5~~ 3	0	1
C	~~28~~ 26	~~14~~ 12	~~7~~ 5	0	1
D	15	6	0	0 0+2	1
تعداد مورد نیاز	1	1	1	1	

فروشنده	1	2	3	4	تعداد مورد نیاز
A	0	0 0+3	7	2 2+3	1
B	~~22~~ 19	0	~~3~~ 0	0	1
C	~~26~~ 23	12	~~5~~ 2	0	1
D	15	6 6+3	0	2 2+3	1
تعداد مورد نیاز	1	1	1	1	

$Z^* = X_{11}, X_{22}, X_{34}, X_{43}$

$Z^* = 40 + 28 + 0 + 27 = 95$

تمرین 8 : رئیس یک مدرسه ابتدایی می خواهد **5** معلم خود را به نام های تیرانداز ، فرجی ، ابراهیمی ، اسماعیلی به کلاس های **1 و 2 و 3 و 4 و 5** طوری تخصیص دهد که هزینه های کل معلمین حداقل گردد.

اگر رئیس مدرسه **30/000/000** تومان در اختیار داشته باشد و بخواهد از روی جدول هزینه ی زیر افراد را برای اول مهر انتخاب کند و از طرفی میخواهد بخشی از این پول را صرف هزینه های عمرانی کند پیشنهاد شما برای این مخارج هزینه های عمرانی **حداکثر** چقدر است ؟

کلاس / معلم	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

کلاس / معلم	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

کلاس / معلم	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

معلم \ کلاس	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

معلم \ کلاس	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

Z* =

عدم توازن در مسائل تحقیق :

در این قسمت دو حالت بررسی می شود

الف- افراد بیش از مشاغل باشند   ب- مشاغل بیش از افراد باشند

در **حالت اول** یک ستون را ایجاد می کنیم به صورت یک کارخانه مجازی با تعداد مورد نیاز 1 وهزینه های صفر

در **حالت دوم** یک سطر را ایجاد می کنیم با تعداد مورد نیاز 1 و هزینه های صفر که بعد از حل عددی که به آنها تعلق می گیرد به صورت مجازی است .

نکته * مسائل با تخصیص غیر قابل قبول :

در مسائل با تخصیص در صورتی که با حالتی برخورد کنیم که تخصیص یک شغل به یک فرد بخصوص امکان پذیر نباشد کافیست برای آن هزینه های زیاد مانند M در نظر گرفته شود انجام این کار دقیقا به مفهوم اضافه شدن M به تابع هدف مسائل برنامه ریزی خطی برای حذف متغیر های موضوعی یا به کار گیری M در مسائل حمل ونقل است .

حداکثر کردن :

الف) تمام اعداد هر ستون از بزرگترین عدد آن ستون کسر شود.

ب) تمام اعداد تابع تخصیص را در 1- ضرب کنید.

ج) بزرگترین عدد تابلو تخصیص را انتخاب و تمام عناصر تابلوی تخصیص را از آن کم کنیم.

جواب بهینه چند گانه : بعد از بدست آوردن جواب بهینه برای یک مسئله تخصیص ممکن است تعداد وموقعیت صفر ها در جدول نهایی به گونه ای باشد که بتوان بیش از یک جواب بهینه برای مساله یافت . هر گاه در جدول نهایی تعداد صفرها برای سطر یا ستونی بیش از یک باشد امکان جواب بهینه چندگانه وجود دارد .

مثال 11 (جواب بهینه چند گانه)

	A	B	C	D	E
1	~~2~~ 0	4 0	~~3~~ 0	~~5~~ 0	4 0
2	~~7~~ 5	4 0	~~6~~ 3	~~8~~ 3	4 0
3	~~2~~ 0	~~9~~ 5	~~8~~ 5	~~10~~ 5	4 0
4	~~8~~ 6	~~6~~ 2	~~12~~ 9	~~7~~ 2	4 0
5	~~2~~ 0	~~8~~ 4	~~5~~ 2	~~8~~ 3	~~8~~ 4

	A	B	C	D	E	
1	0+2 0	0	0	0	0	0+2
2	5+2 5	0	3	3	0	0+2
3	0	5	~~5~~ 3	~~5~~ 3	0	
4	6	2	~~9~~ 7	~~2~~ 0	0	
5	0	4	~~2~~ 0	~~3~~ 1	4	

	A	B	C	D	E
1	2	0	0	0	2
2	7	0	3	3	2
3	0	5	3	3	0
4	6	2	7	0	0
5	0	4	0	1	4

Min Z_1 =

Mi n Z_2 =

مسئله تخصیص تعمیم یافته :

مسئله تخصیص را در نظر بگیرید که در آن بیش از یک فرد را می توان به یک شغل تخصیص دارد . یا انجام چند شغل به وسیله یک فرد میسر است ، برای این نوع مسائل تکنیک ابتکاری بسیار کارایی وجود دارد که می تواند حتی مسائل بزرگ را حل کند روش حل مسئله با بیان یک مثال حل می شود.

در جدول فوق خلاصه داده ها برای مسائل تخصیص داده نشده در این مسئله 9 شغل و4 فرد وجود دارد زمان لازم برای هر شغل وابسته به مهارتهای فرد ودشواری شغل است که این زمان ها در جدول لحاظ شده است . در پایین جدول حداکثر زمانیکه هر فرد مایل است در طول دوره زمانی مورد نظر وقف انجام وظایف محوله کند دیده می شود ، هدف مسئله تخصیص 9 شغل به 4 فرد است به طوریکه مجموع زمان مصرفی حداقل شود.

شغل / فرد	A	B	C	D
1	**4**	**3**	**12**	**7**
2	**8**	**10**	**12**	**6**
3	**3**	**5**	**2**	**5**
4	**10**	**6**	**2**	**4**
5	**10**	**3**	**7**	**9**
6	**8**	**10**	**9**	**9**
7	**7**	**2**	**10**	**12**
8	**5**	**9**	**4**	**14**
9	**10**	**8**	**15**	**7**
زمان در دسترس	**15**	**12**	**20**	**14**

روش حل به شکل سیمپلکس : کاربرد ندارد

$$mins = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} cij\ xij$$

$$st\begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} xij = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} cij\ xij\ \leq aij \end{Bmatrix}$$

$xij \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$ **اگر شغل i به فرد j اختصاص یابد . در غیر این صورت**

Cij= i **زمان مورد نیاز برای به اجرا در آوردن شغل j به وسیله فرد i**

الگوریتم حل این مسئله بسیار شبیه به وگل است ، جریمه هایی برای هر سطر مبتنی بر تفاوت دو تا از کمترین اعداد در هر سطر پیدا می شود ، تخصیص در هر مرحله بر مبنای بزرگترین جریمه اگر چنین تخصیصی بیش از aj (مجموعه زمانی که فرد j می تواند صرف کند) نباشد صورت می پذیردکه به صرت الگوریتم زیر بیان می شود :

گام 1 : ماتریسی به شکل فوق بنویسید .

گام 2 : k را مساوی یک قرار دهید.

گام 3 : زمان در دسترس **ak** را با کمترین زمان مورد نیاز **ci** ها در سطر **k ام** مقایسه کنید . اگر $min\{cik\} > aij$ باشد ستون **k** از دور محاسبات خارج می شود ودر نظر گرفته نمی شود.

گام 4 : گام سوم را برای **k=2,k=3,...,kn** تکرار کنید .

گام 5 : جریمه هر سطر را برای ماتریس گام اول با انجام تفاضل بین دو تا از کمترین اعداد هر سطر محاسبه کنید ، جریمه ها در سطر راست جدول بنویسید .

گام 6 : یک تخصیص برای عنصری که دارای کمترین هزینه در سطر بیشترین جریمه است ومقدار این تخصیص بیش از زمان در دسترس aj نیست انجام دهید .

گام 7 : مقدار تخصیص داده نشده را از زمان در دسترس کم کنید .

گام 8 : گام های 2 تا 7 را تا اینکه تمام مشاغل تخصیص داده شوند ادامه بدهید .

مثال 12 : مسئله را حل کنید.

شغل / فرد	A	B حذف	C	D	جریمه
1	4	3	12	7	1 $\boxed{5}$
2	8	10	12	6	2 $\boxed{3}$
3	3	5	2	5	1
4	10	6	2	4	2 $\boxed{4}$
5	10	3	7	9	4 $\boxed{2}$
6	8	10	9	9	1
7	7	2	10	12	5 $\boxed{1}$
8	5	9	4	14	1
9	10	8	15	7	1
زمان در دسترس	15	~~12~~ ~~10~~ ~~7~~ 4	~~20~~ 18	~~14~~ 8	

شغل / فرد	A	B حذف	C	D حذف	جریمه
1	4	3	12	7	–
2	8	10	12	6	–
3	3	5	2	5	1
4	10	6	2	4	–
5	10	3	7	9	–
6	8	10	9	9	1
7	7	2	10	12	–
8	5	9	4	14	1
9	10	8	15	7	3 $\boxed{6}$
زمان در دسترس	15	~~12~~ ~~10~~ ~~7~~ 4	~~20~~ 18	~~14~~ ~~8~~ 1	

شغل / فرد	A	B حذف	C	D حذف	جریمه
1	4	3	12	7	–
2	8	10	12	6	–
3	3	5	2	5	1 $\boxed{7}$
4	10	6	2	4	–
5	10	3	7	9	–
6	8	10	9	9	1 $\boxed{8}$
7	7	2	10	12	–
8	5	9	4	14	1 $\boxed{9}$
9	10	8	15	7	–
زمان در دسترس	~~15~~ 7	~~12~~ ~~10~~ ~~7~~ 4	~~20~~ ~~18~~ ~~16~~	~~14~~ ~~8~~ 1	

به این ترتیب با توجه به جدول نهایی فرد A به شغل6 و فرد B به شغلهای 1و5و7 وفرد C به شغلهای 3و4و8 وفرد D به شغلهای 2و9 اختصاص می یابند .

Z*= 3 + 6 + 2 + 2 + 3 + 8 + 2 + 4 + 7 = 37

تمرین 9 : در مسئله تخصیص زیر یک فرد می تواند بیش از یک کار را انجام دهد نحوه تخصیص چگونه است؟

شغل / فرد	1	2	3	جریمه
1	18	16	11	5
2	14	21	19	5
3	23	27	33	4
4	16	24	23	7
5	17	24	24	7
6	25	28	30	3
زمان در دسترس	47	41	46	

شغل / فرد	1	2	3	جریمه
1				
2				
3				
4				
5				
6				
زمان در دسترس				

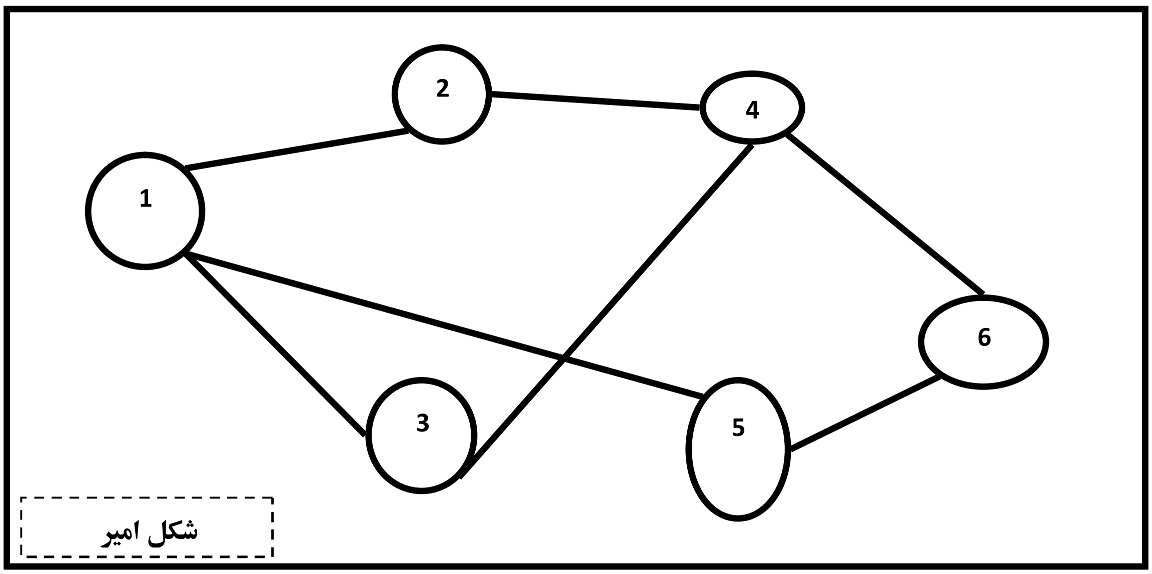
شغل / فرد	1	2	3	جریمه
1				
2				
3				
4				
5				
6				
زمان در دسترس				

فصل سوم : مدل های تحلیل شبکه

مدلهای حمل ونقل وتخصیص بخشی از مدلهای برنامه ریزی خطی وبه عبارت دیگر زیر مجموعه ای از مدلهای خطی شبکه هستند در این فصل مسائل دیگری از برنامه ریزی خطی که به صورت شبکه مدلسازی می شوند توضیح داده خواهند شد .

تعاریف یا مفاهیم :

شبکه یا گراف خطی : شامل تعدادی گره (**nod**) یا نقاط اتصال است که برخی یا تمام آنها با شاخه (**branch**) یا کمان هایی به هم وصل شده اند. در شکل زیر **1و2و3و4و5و6 گره** هستند وخطوطی که گره ها را به هم متصل می کند حال چه خط باشد چه منحنی **شاخه** نامیده می شود.



گره ها می تواند ایستگاه اتوبوس باشد ، پمپ خانه های نفت ، رستوران ، بیمارستان ، دفاتر مخابراتی ، بانکها

شاخه ها می تواند جاده باشند ، خطوط هوایی ، کابل هوایی ، کابل ، لوله گاز ، لوله نفت و... وجریان می تواند اتوبوس باشد هواپیما ، آب ، بنزین والکتریسیته باشد .

شاخه ها را می توان به **2** گروه تقسیم کرد : 1- شاخه جهت دار 2- شاخه بدون جهت

1- شاخه جهت دار : اگر جریان در شاخه تنها در یک جهت مجاز باشد (مانند خیابان یک طرفه) به آن شاخه جهت دار می گوئیم که با یک پیکان در آخر شاخه مشخص می شود.

2– شاخه بدون جهت : اگر جریان در شاخه در هر دو طرف باشد (مانند خیابان دو طرفه)به آن شاخه بدون جهت می گویند .

شبکه های جهت دار و بدون جهت :

شبکه : شبکه ای که فقط شاخه های جهت دار باشد .

شبکه بدون جهت : شبکه ای که فقط دارای شاخه های بدون جهت باشد یک شبکه می تواند دارای مجموعه ای از شاخه های جهت دار و بدون جهت باشد ، اگر شاخه ای بدون جهت بود می توان دو پیکان رفت و برگشت به انتهایش اضافه کرد .

اعدادی که در شبکه های جهت دار در سمت چپ دو شاخه بین دو گره نوشته می شوند نشان دهنده میزان جریان ارسالی است و عددی که بر سمت راست یک شاخه نوشته می شود برابر است با میزان کالای ارسالی از مقصد به مبدأ که به دو شکل نشان داده می شود .

شاخه های متصل شده : شاخه هایی را متصل شده گویند که دارای یک گره مشترک باشند در شکل امیر **(2–1)** ، **(3–1)** متصل شده هستند اما شاخه های **(2–1)** ، **(4–3)** متصل نیستند .

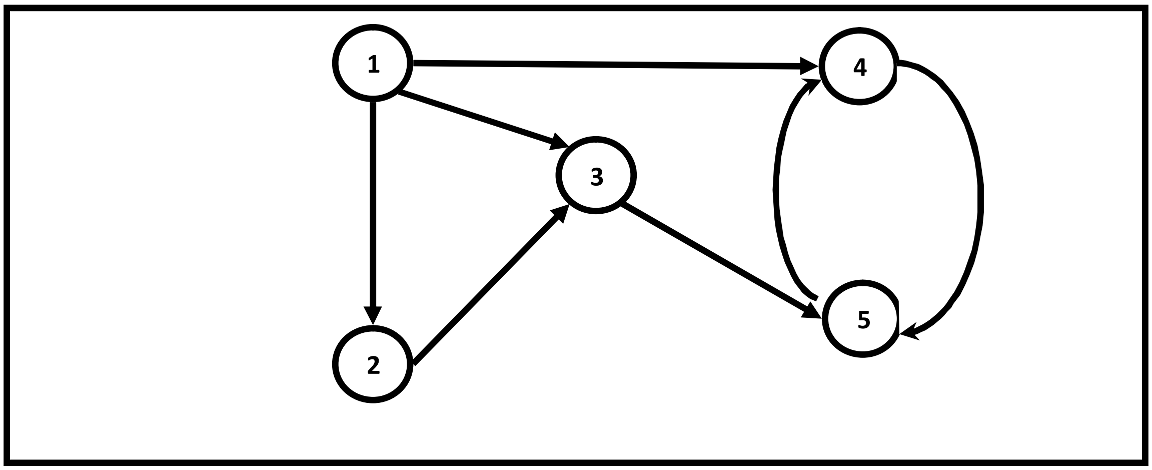
مسیر : مسیر بین دو گره عبارتست از یک سری شاخه های دنبال هم مشخص که آن دو را به هم متصل می کند در شکل امیر شبکه (یکی از مسیرهای شبکه که بین گره **1 و 6** توسط شاخه های متوالی وجود دارد .

{ **(6–4)(4–2) (2–1)** } مسیر شکل امیر

هنگامی که تمام شاخه ها یا بعضی از آن ها جهت دار باشند بین مسیر جهت دار و بدون جهت می توان تفاوت قائل شد .

مسیر جهت دار : مسیر جهت دار از گره **i** به گره **j** مسیری است که شاخه ها در جهت **j** باشند ، به طور کلی جریان از گره **i** به گره **j** امکانپذیر باشد .

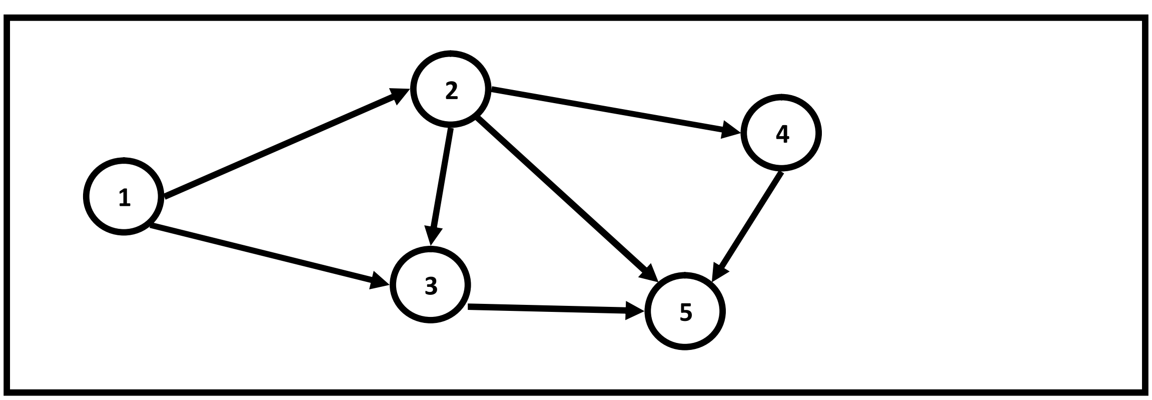
مسیر بدون جهت : مسیر بدون جهت از گره **i** به گره **j** عبارتست از یک سری شاخه های دنبال هم متصل شده که جهت در آنها به طرف گره **j** یا مخالف جهت آن باشد .



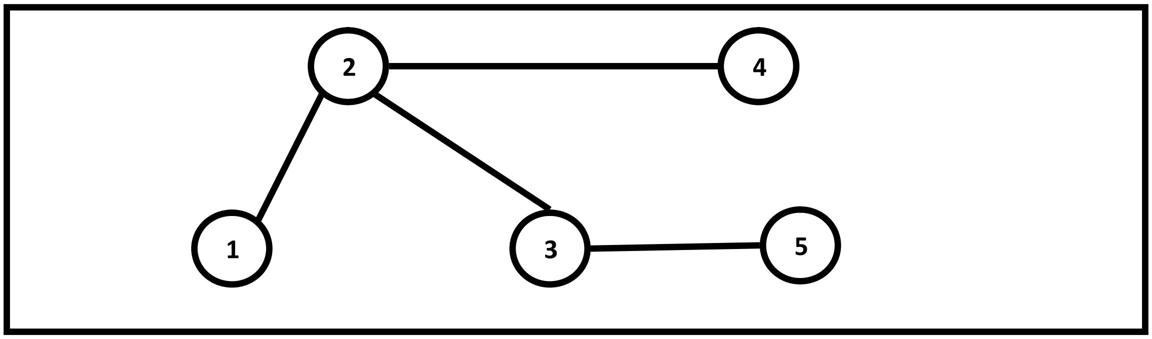
نشان دهندهٔ یک شاخه جهت دار است که شاخه های متوالی **(1–2)** ،**(2–3)**،**(3–4)** ، **(4–5)** مسیری جهت دار را نشان می دهد و از طرفی دیگر شاخه های **(2–3)** **و** **(3–1)** **و** **(1–4)** یک مسیر جهت دار نیست از **3** به **1** حق حرکت نداریم اما می تواند یک مسیر بدون جهت باشد .

حلقه : حلقه مسیری است که گره شروع و ختم آن یکی است ، وقتی حلقه جهت دار است که مسیر جهت دار باشد در غیر این صورت حلقه بی جهت است در شکل فوق شاخه های **(5–4)** **و** **(4–5)** یک حلقه جهت دار را تشکیل می دهد اما **(1–2)**،**(2–3)**، **(3–1)** یک حلقه جهت دار نیست چون شاخه **(3–1)** نداریم اما حلقه بدون جهت است .

شبکه غیر مدبر : به شبکه ای که بدون حلقه جهت دار باشد یک شبکه غیر مدبر می گویند .



درخت : شبکه ای که تمام گره های آن به هم متصل شده و حلقه ای در آن وجود نداشته باشد .

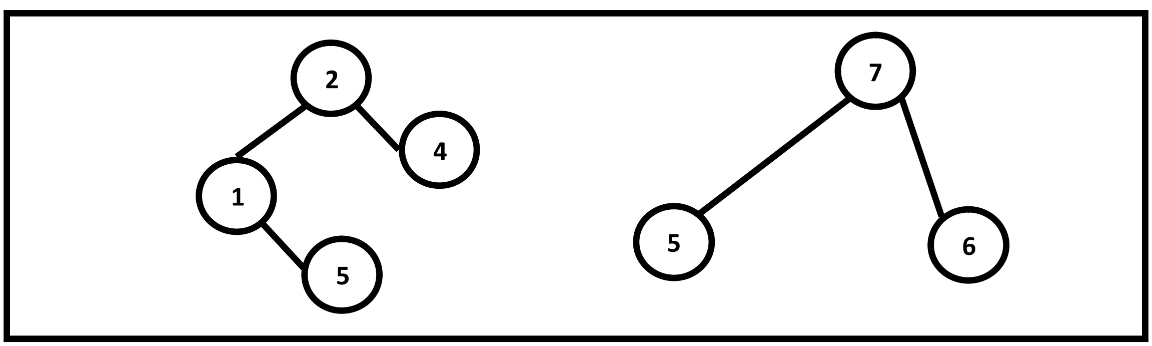


به عبارت دیگر درخت شبکه ای متصل با **n** گره و **n-1** شاخه که بدون حلقه باشد شبکه درختی گویند.

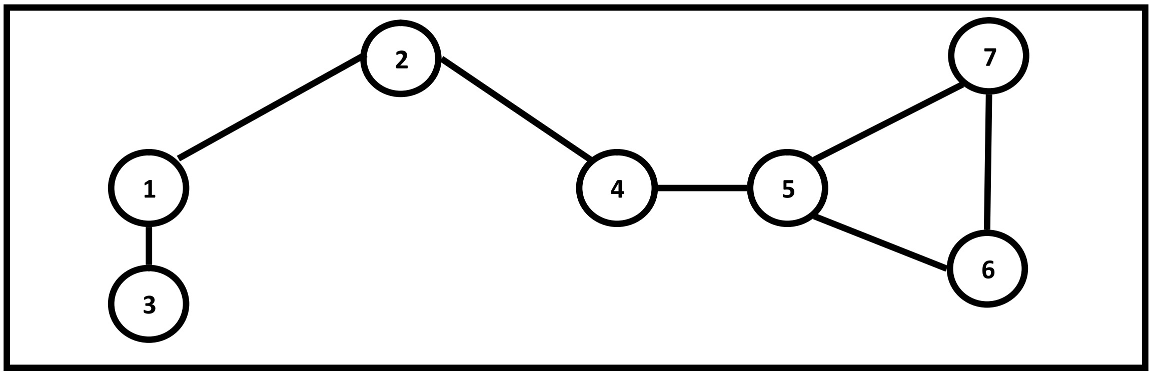
یک شبکه درختی دارای کمترین شاخه مورد نیاز جهت اتصال تمام گره ها برای ایجاد شبکه ای متصل شده است .

در اشکال زیر حالت **الف** شبکه درختی نیست چون بهم متصل نیستند ، گره های (**1و2و3و4**) **با** (**5و6و7**) متصل نیستند . در شکل ب شبکه درختی وجود ندارد چون حلفه ای وجود دارد (**5و6و7**) و از طرف دیگر ما **7** گره داریم وباید **6** شاخه داشته باشیم اما **7** شاخه داریم .در شکل ج شبکه درختی وجود دارد زیرا **7** گره ، **6** شاخه و بدون حلقه می باشد .

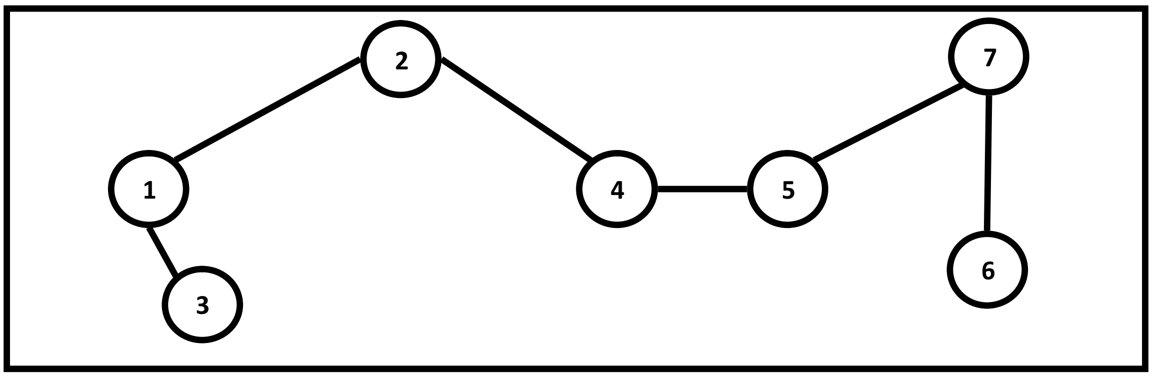
الف



ب



ج

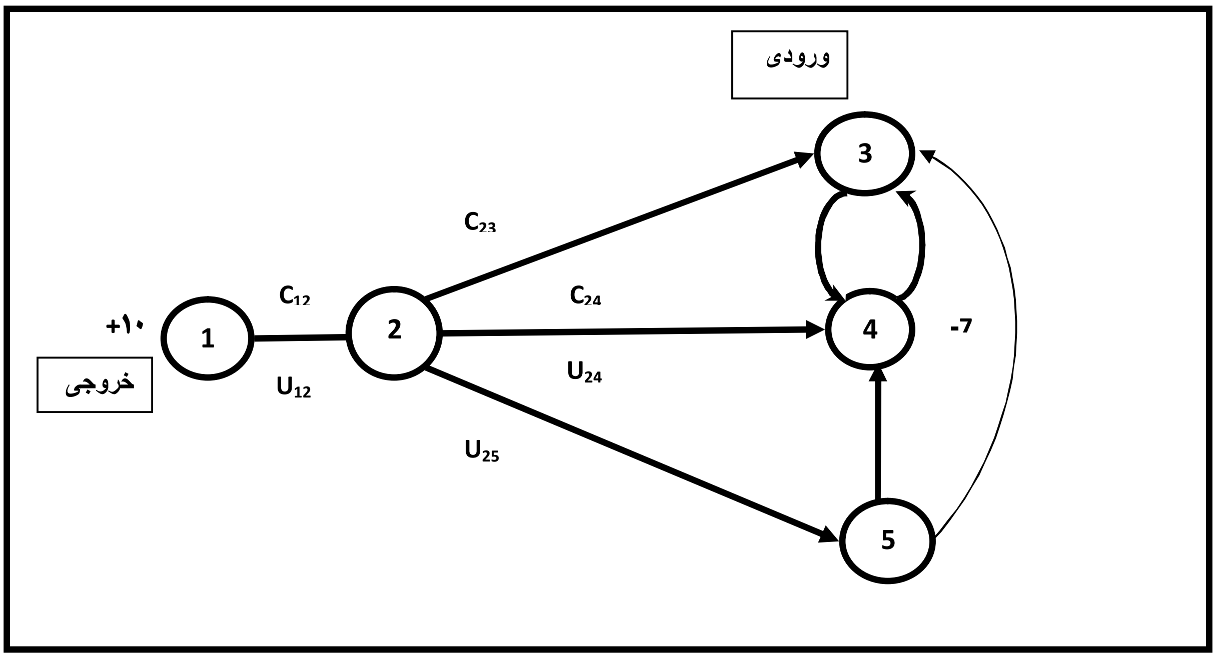


تعداد شاخه ها : به طور کلی در یک شبکه متصل شده رابطه بین تعداد گره ها (n) و تعداد شاخه ها b

($b \geq n-1$)

تبیین بحث شبکه ها در قالب مدلهای برنامه ریزی خطی :

مسائل شبکه : گروهی بزرگ و خاص از مدلهای برنامه ریزی خطی را تشکیل می دهد این مدلها دارای شرایط خاص ریاضی هستند که امکان استفاده از الگوریتم های بسیار کارا برای بدست آوردن جوابهای عدد صحیح را فراهم می سازد .



عدد **10**+ روی گره **1** به مفهوم ارسال جریانی به میزان **10** واحد از یک گره ، گره **1** است و اعداد **3**– **و 7**– به معنی دریافت جریانی به میزان **3 و 7** وسیله گره های **3و**4 است ، هر مسیر در شبکه دارای هزینه های(**cij**) و ظرفیتهایی (**uij**) می باشد ، مثلاً هزینه ارسال جریان در این شاخه با **(3–5) C** و حداکثر ارسال جریان در این شاخه با **(3–5) U** نمایش داده می شود .

اگر **xij** میزان ارسال جریان از گره **i** به گره **j** باشد مدل برنامه ریزی خطی آن را بنویسید .

xij= ارسال از i به j

Min Z =x_{12} c_{12} +$x_{23}c_{23}$+$x_{24}c_{24}$+$x_{25}c_{25}$+$x_{34}c_{34}$+$x_{43}c_{43}$+$x_{54}c_{54}$+$x_{53}c_{53}$

$$\boldsymbol{s.t}\begin{cases} \boldsymbol{x_{12} = 10} \\ \boldsymbol{-x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0} \\ \boldsymbol{-x_{23} - x_{43} - x_{53} + x_{34} = -3} \\ \boldsymbol{-x_{24} - x_{54} - x_{34} + x_{43} = -7} \\ \boldsymbol{-x_{25} + x_{54} + x_{53} = 0} \end{cases}$$

$$0 \leq xij \leq uij$$

مسئله کوتاه ترین مسیر : به منظور تعیین بهترین مسیری که کوتاه ترین ساخت بین دو گره مبدأ و مقصد را در یک شبکه ارائه می کند بکار گرفته می شود. **Cij** بیانگر میزان مسافت ، هزینه یا زمان طی شده بین دو گره **i** تا **j** است .

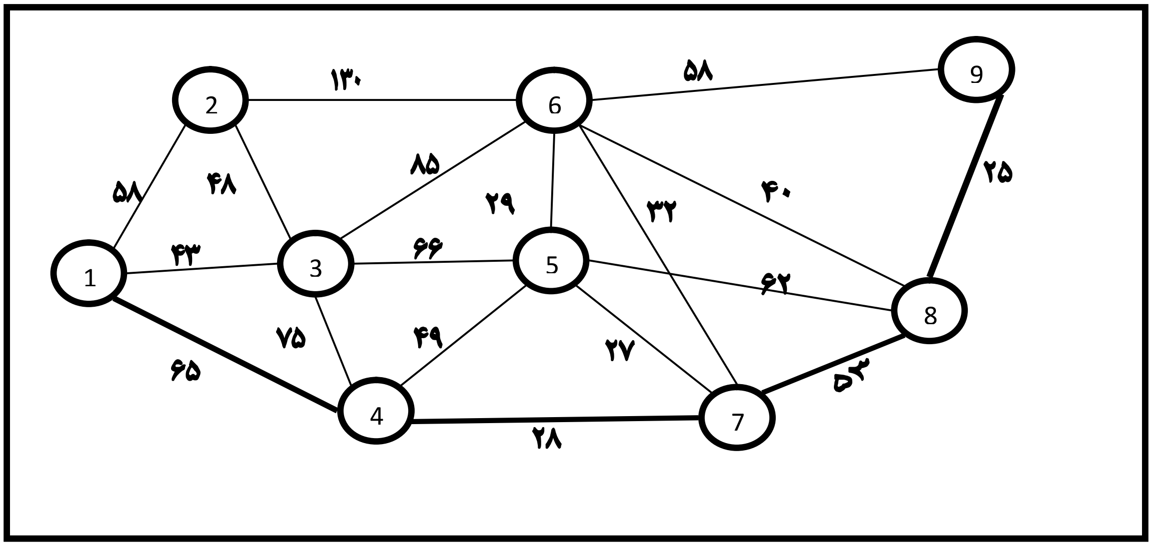
مدل برنامه ریزی خطی کوتاه ترین مسیر :

$$minZ = \sum_{i} \sum_{j \neq i} \quad cij \quad xij$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{k \neq 1} xik - \sum_{k \neq j} kj = 1 & \text{اگر } i \text{ مبدأ باشد} \\ \sum_{k \neq j} xik - \sum_{k \neq j} xkj = 0 & \text{اگر } j \text{ نه مبدأ و نه مقصد باشد} \\ \sum_{k \neq j} xik - \sum uj = 1 & \text{اگر } j \text{ مقصد باشد} \end{cases}$$

$$xij \geq 0$$

مثال 13: شبکه زیر رادر نظر بگیرید .



Minz=58 x_{12} +43 x_{13}+65 x_{14}+…+25x_{85}

$$\begin{cases}(x_{12}+x_{13}+x_{14})-(x_{21}+x_{31}+x_{41})=1\\(x_{21}+x_{23}+x_{26})-(x_{12}+x_{32}+x_{62})=0\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad .\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad .\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad .\\ \quad\quad(x_{69}+x_{89})-(x_{96}+x_{98})=-1\end{cases}$$

$xij \geqslant 0$

روش کوتاه ترین مسیر :

این روش دارای گام های زیر است :

گام اول : جدولی بسازید که به تعداد گره ها ستون داشته و بر بالای هر ستون نام گره مشخص شده باشد و در هر ستون تمام شاخه هایی که از آن گره منشعب شده اند به ترتیب از کمترین مقدار مسافت هزینه نوشته شود مگرآنهایی که به مبدأ ختم می شوند .

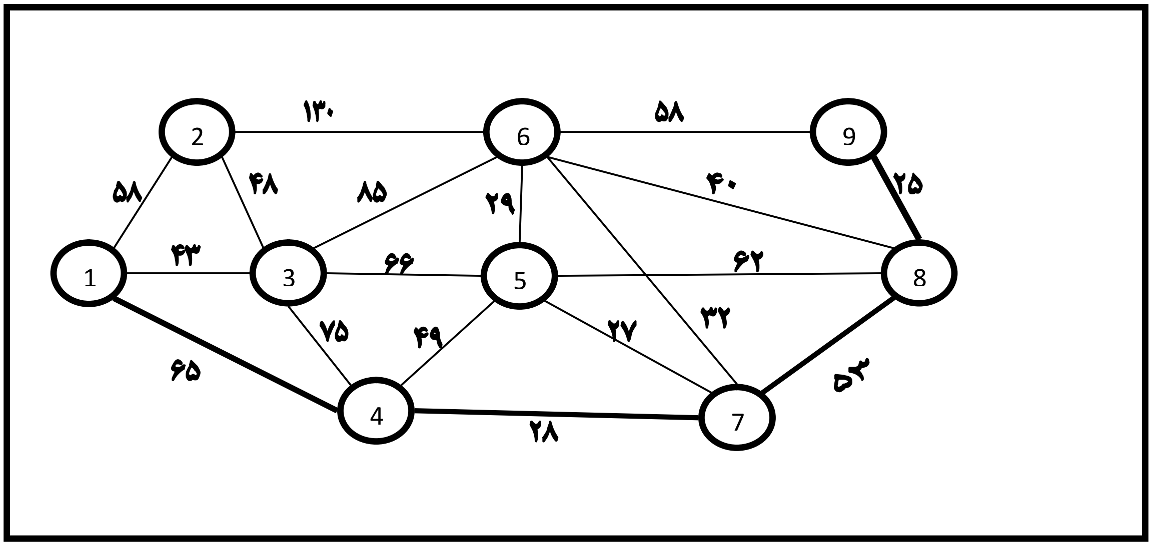
گام دوم : به گره مبدأ مقدار صفر را تخصیص دهید و آن را بالای ستون بنویسید در این ستون شاخه ای را که دارای کمترین مقدار است انتخاب کنید و دور آن مستطیل بکشید و به گره 1 . که این شاخه به آن ختم می شود مجموع مقادیر آن ستون و مقدار این شاخه را اختصاص دهید و حاصل جمع آن را بر بالای ستون آن گره بنویسید . همه شاخه هایی را که به این گره جدید مقدار تخصیص داده شده ((آخر پرانتز ها عدد مورد نظر باشد)) ختم می شوند در نظر نگیرید و خط بزنید .

گام سوم : اگر گره جدید گره مقصد است به گام پنجم بروید در غیر این صورت به گام چهارم بروید .

گام چهارم : کلیه ستون هایی را که به آن ها مقداری تخصیص داده شده و در آن ها شاخه هایی بدون مستطیل یا خط نخورده اند در نظر نگیرید . در هر ستون شاخه ای با کمترین مقدار (بدون مستطیل و بدون خط خوردگی) را در نظر بگیرید و با مقدار آن ستون جمع کنید کمترین مقدار را دارد انتخاب کنید و شاخه ای را که دارای کمترین مقدار است برگزینید و به گرمای که این شاخه به آن ختم می شود این مقدار را تخصیص دهید و در بالای این ستون جدید بنویسید و سپس به گام سوم برگردید (این عمل را آنقدر ادامه دهید تا به تمام ستون ها مقداری تخصیص داده شود .

گام پنجم : مقدار Z^* مقدار تخصیص داده شده به گره مقصد است . برای یافتن کوتاه ترین مسیر از گره مقصد شروع کنید و از طریق شاخه هایی که دور آن مستطیل کشیده شده است مسیر را پیدا کنید .

مثال 14 : مدل زیر را به روش کوتاه ترین مسیر حل کنید .



0	58	43	65	109	125	93	146	171
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
(1-3)=43	(2-3)=48	(3-1)=43	(4-7)=28	(5-7)=27	(6-5)=29	(7-5)=27	(8-9)=25	(9-8)=25
(1-2)=58	(2-1)=58	(3-2)=48	(4-5)=49	(5-6)=29	(6-7)=32	(7-4)=28	(8-6)=40	(9-6)=58
(1-4)=65	(2-6)=130	(3-5)=66	(4-1)=65	(5-4)=49	(6-8)=40	(7-6)=32	(8-7)=53	
		(3-4)=75	(4-3)=75	(5-8)=62	(6-9)=58	(7-8)=53	(8-5)=62	
		(3-6)=85		(5-3)=66	(6-3)=85			
					(6-2)=130			

min {(5+0)و(43+48)}=58

min { (65+0)و(58+130)و(43+66)}}=65

min{(x)و(58+130)و(43+66)و(65+38)}=93

min{(x)و(58+130)و(43+66)و(65+49)و(27+93)}=109

min {(x)و(58+130) و (85+43)و(29+109)و(93+32)}=125

min{(62+109)و(40+125)و(93+53)}=146

min{(58+125)و(25+146)}=171

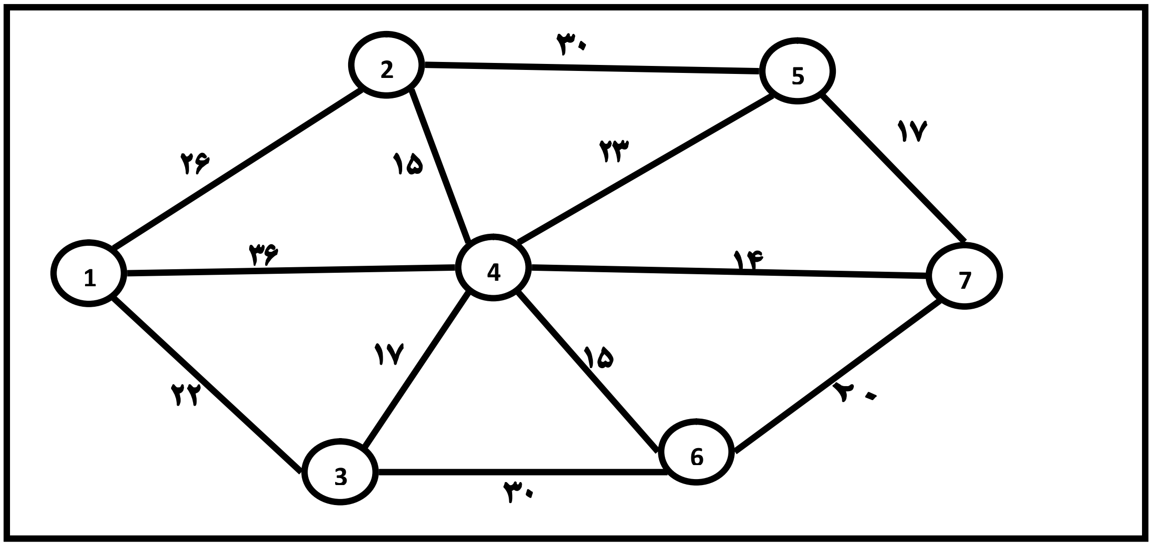
کوتاهترین مسیر = 9 → 8 → 7 → 4 → 1

یـــا

کوتاهترین مسیر = 1 → 4 → 7 → 8 → 9

$Z^*=171$

تمرین 10 : مدل زیر را به روش کوتاه ترین مسیر حل کنید .



0						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

min { (+) و (+) }=

min { (+) و (+) و (+) } =

min { (+) و (+) و (+) } =

min { (+) و (+) و (+) و (+) }=

min { (+) و (+) و (+) } =

کوتاهترین مسیر = → →

$Z^{*}=$

الگوریتم حداکثر جریان : مدل برنامه ریزی خطی برای حس مسأله حداکثر جریان به محاسبات زیادی نیاز دارد لذا از الگوریتم زیر استفاده می شود به منظور درک بهتر این الگوریتم جریانی را از گره آغازین تا پایانی در نظر بگیرید . مسیرهای متعددی بین این دو گره وجود دارد هر گاه به طور اختیاری مسیری را انتخاب کنیم حداکثر جریان در این مسیر با توجه به نکات زیر تعیین می شود .

1. جریان خروجی از یک گره با جریان ورودی به آن گره مساوی است .
2. حداکثر میزان جریانی که در یک مسیر می توان از مبدا به مقصد فرستاد با شاخه ای که کمترین ظرفیت ارسال در این مسیر را دارد برابر است .

بنابراین در مسیر اختیاری در نظر گرفته شده حداکثر جریان معادل حداقل ظرفیت میزان ارسال از کلیه گره ها تا مقصد است ، هنگامی که به شاخه ای خاص جریانی اختصاص داده می شود .

1. ظرفیت در جهت جریان تخصیص داده شده به همان میزان جریان کاهش یابد .
2. ظرفیت در جهت مخالف جریان به همان میزان جریان افزایش یابد .

الگوریتم زیر گام های لازم برای حل مسئله حداکثر جریان را ارائه می کند :

گام اول : مسیری را از مبدأ تا مقصد پیدا کنید که همراه با یک جریان مثبت است ، اگر چنین مسیری پیدا نشد به گام پنجم بروید .

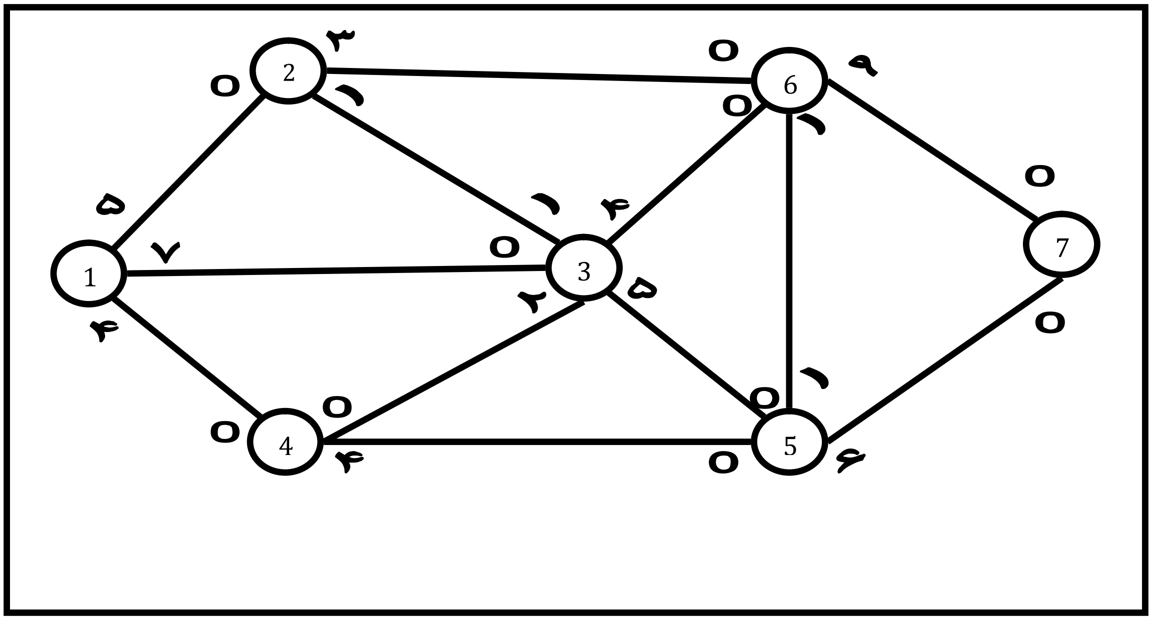
گام دوم : حداکثر جریانی را که می توان از طریق این مسیر ارسال کرد تعیین کنید و آن را با C^* نشان دهید .

گام سوم : مقدار C^* را از مقدار ارسالی از هر گره کم و به مقدار دریافتی توسط هر گره اضافه کنید .

گام چهارم : به گام اول بروید .

گام پنجم : حداکثر جریان عبارتست از میزان ارسالی به مقصد .

مثال15 : حداکثر جریان را در شبکه زیر پیدا کنید .



1) 1 – 3 – 6 - 7

- از مبدأ کم و به مقصد اضافه شود ⇦
- مبدأ صفر شود مسیر خط می رود

عدد ارسال ⟶ **min{7و5و6}=5**

$\mathbf{2)}\ \ \mathbf{1-2-5-7}$

$\mathbf{min\{5\ ,3,9\}=3}$

$\mathbf{3)}\ \ \mathbf{1-2-3-5-7}$

$\mathbf{min\{2,1,4,6\}=1}$

$\mathbf{4)\ 1-3-5-7}$

$\mathbf{min\{2,3,5\}=2}$

$\mathbf{5)\ 1-4-6-7}$

$\mathbf{min\{4,4,1\}=1}$

$\mathbf{6)\ 1-4-6-5-7}$

$\mathbf{min\{3,3,1,3\}=1}$

$\boldsymbol{C^*}\mathbf{=5\ 8\ 9\ 11\ 13}$

$\boldsymbol{C^*}\mathbf{=13}$