تبدیلات لاپلاس :

فرض کنیم که تابع $f(x)$ در بازه $[0,+\infty)$ تعریف شده است و s عددی اختیـاری و بزرگتـر مســاوی صفر باشد $(s \geq 0)$. تبدیل لاپلاسی $f(x)$ را به صورت زیر نمایش می دهند که برابر است با :

$$L\{f(x)\}=\int_0^{+\infty} e^{-sx}.f(x)dx$$

که به e^{-sx} هسته تبدیل لاپلاسی می گویند .

برای به دست آوردن تبدیل لاپلاسی ، این انتگرال ناسره باید همگرا باشد (یعنی بینهایت نشود)

....

مثال :

$$L\{1\}=\int_0^{+\infty} e^{-sx}(1)dx=\lim_{b\to 0}\frac{1}{-s}\int_0^b -se^{-sx}dx$$

$$=Lim_{b\to 0}(-\frac{1}{s}(e^{-sx})|_0^b)=Lim(-\frac{1}{s}(e^{-sb}-e^{s(0)}))$$

$$=-\frac{1}{s}(e^{-s(+\infty)}-e^0)=\frac{1}{-s}(e^{-\infty}-1)=-\frac{1}{s}(\frac{1}{e^{+\infty}}-1)=\frac{1}{-s}(0-1)=\frac{1}{s}\Rightarrow L\{1\}=\frac{1}{s}$$

....

مثال :

$$L\{x\}=\int_0^{+\infty} e^{-sx}(x)dx=Lim_{b\to +\infty}\int_0^b xe^{-se}dx$$

حل $\int xe^{-sx}dx=$

$$*\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=e^{-sx}dx\Rightarrow v=\frac{-1}{s}e^{-sx}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{*}-\frac{x}{s}e^{-sx}-\int -\frac{1}{s}dx=-\frac{x}{s}e^{-sx}+\frac{1}{(-s)(s)}\int -se^{-sx}dx$$

$$=\frac{-x}{s}e^{-sx}-\frac{1}{s^2}e^{-sx}\,*$$

$$\xrightarrow{*}Lim_{b\to +\infty}((-\frac{x}{s}e^{-sx}-\frac{1}{s^2}e^{-sb})|_0^b)$$

$$= Lim\left[(-\frac{b}{s}e^{-sb}-\frac{1}{s^2}e^{-sb})-(-\frac{(0)}{s}e^{-s(0)}-\frac{1}{s^2}e^{-s(0)})\right]$$ ادامه دهید.

....

چند قاعده ومثال:

$$*)\ L\{x^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}\ n\in N$$

$$1)L\{x^4\}=\frac{4!}{s^5}$$

$$2)L\{x^{10}\}=\frac{10!}{s^{11}}$$

$$*)\ L\{e^{ax}\}=\frac{1}{s-a}$$

$$1)L\{e^{2x}\}=\frac{1}{s-2}$$

$$2)L\{e^{-3x}\}=\frac{1}{s+3}$$

$$L\left\{e^{\frac{1}{4}x}\right\}=\frac{1}{s-\frac{1}{4}}$$

$$*)\ L\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$1)L\{\sin 3x\}=\frac{3}{s^2}+9$$

$$2)L\{\sin(-2x)\}=\frac{-2}{s^2+4}$$

$$3)L\left\{\sin(\frac{x}{3})\right\}=\frac{\frac{1}{3}}{s^2+\frac{1}{9}}$$

$$*)\ L\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$1)L\{\cos 3x\}=\frac{s}{s^2+9}$$

$$2)L\left\{\cos \frac{x}{4}\right\}=\frac{s}{s^2+\frac{1}{16}}$$

....

تمرین :

$$L\left\{x^{\frac{-1}{2}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

....

خواص تبدلات لاپلاس :

$$1)L\{cf(x)\}=c.L\{f(x)\}$$

$$2)L\{f(x)\pm g(x)\}=L\{f(x)\}\pm L\{g(x)\}$$

$$3)\{f(x).g(x)\}\neq L\{f(x)\}.L\{g(x)\}$$

$$4)L\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\neq \frac{L\{f(x)\}}{L\{g(x)\}}$$

....

مثال :

$$L\{\sin^2 x\}=L\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}=L\left\{\frac{1}{2}\right\}-L\left\{\frac{\cos 2x}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}L\{1\}-\frac{1}{2}L\{\cos 2x\}=\frac{1}{2}(s)-\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+4})=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(s^2+4)}$$

....

مثال:

$$L\{\sinh x\}=L\left\{\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right\}=\frac{1}{2}L\left[e^x\right]-\frac{1}{2}L\{e^{-x}\}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1})-\frac{1}{2}(\frac{1}{s+1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})=\frac{1}{2}(\frac{s+1-(s+1)}{s^2-1})$$

$$= \frac{1}{s^2 - 1}$$

تمرین:

$$L\{\cosh x\} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

مثال :

$$L\{[x]\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}[x]dx = \int_0^1 e^{-sx}[x]dx + \int_1^2 e^{-sx}[x]dx + \int_2^3 e^{-sx}[x]dx + \int_3^4 e^{-sx}[x]dx + ...$$

$$= 0 + \int_1^2 e^{-sx}dx + 2\int_2^3 e^{-sx}dx + 3\int_3^4 e^{-sx}dx + ...$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_1^2 - \frac{2}{s}e^{-sx}\Big|_2^3 + \frac{3}{s}e^{-sx}\Big|_3^4 + ...$$

$$= -\frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-s}) - \frac{2}{s}(e^{-3s} - e^{-2s}) - \frac{3}{-s}(e^{-4s} - e^{-3s}) + ...$$

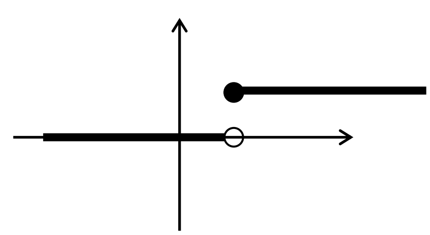
$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-2s} - e^{-s} + 2e^{-3s} - 2e^{-2s} + 3e^{-4s} - 3e^{-3s} + ...\right]$$

$$= \frac{e^{-s}}{s}(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + ...) = \frac{e^{-s}}{s}\left(\frac{1}{1 - e^{-s}}\right) = \frac{1}{s(e^s - 1)}$$

$$\Rightarrow L\{[x]\} = \frac{1}{s(e^s - 1)}$$

تابع پله ای واحد :

$$u(x - c) = u_c(x) = \begin{cases} 1 & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$



مثال :

$$L\{u_c(x)\} \qquad c \succ 0$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} u_c(x)dx = \int_0^c e^{-sx} u_c(x)dx + \int_c^{+\infty} e^{-sx}.u_c(x)dx$$

$$= 0 + \int_c^{+\infty} e^{-sx}dx = Lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}\int_c^b -se^{-sx}dx\right]$$

$$= Lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,|_c^b) = Lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{s}(e^{-sb}-e^{-sc}))$$

$$= -\frac{1}{s}(e^{-\infty}-e^{-sc}) = \frac{e^{-sc}}{s}$$

....

قضیه تغییر مکان (shifting):

$$if \quad L\{f(x)\} = F(s) \quad Then \quad L\{e^{ax}.f(x)\} = F(s-a)$$

....

مثال :

$$L\{e^{2x}.x^{10}\} = \frac{10!}{(s-2)^{11}}$$

$$\left[L\{x^{10}\} = \frac{10!}{s^{11}}\right]$$

....

مثال :

$$L\{e^{-3x}.\sin 4x\} = \frac{4}{(s+3)+16}$$

$$\left[L\{\sin 4x\} = \frac{4}{s^2+16}\right]$$

....

مثال :

$$L\left\{e^{2x}.x^{\frac{-1}{2}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s-2}}$$

$$\left[L\left\{x^{-\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\right]$$

....

قضیه :اگر $L\{f(x)\}=F(s)$ و $n\in N$، آنگاه :

$$L\{x^n.f(x)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

....

مثال :

$$L\{x^2\sin 2x\}*$$

حل) $L\{\sin 2x\}=\dfrac{2}{s^2+4}$

$$*=(-1)\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

....

مثال :

$$L\{x^3.e^{-6x}\}$$

حل $L\{e^{-6x}\}=\dfrac{1}{s+6}$

لذا) $L\{x^1.x^{\frac{1}{2}}\}=(-1)^1\dfrac{d}{ds}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}\right)$

....

مثال :

$$L\{x^{\frac{5}{2}}\}=L\{x^3.x^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$=(-1)^3.\frac{d^3}{ds^3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right)$$

وارون تبدیل لاپلاسی :

فرض کنید که $L\{f(x)\}=F(s)$ ، وارون تبدیل لاپلاسی رابا L^{-1} نشان می دهند و آن را چنین تعریف می کنیم :

$$L^{-1}\{F(s)\}=f(x)$$

$$1)L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1 \qquad 2)L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=x$$

$$*)\ L\{x^n\}=\frac{n}{s^{n+1}}\rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\}=\frac{x^n}{n!}$$

....

مثال :

$$L^{-1}\{\frac{10!}{s^{11}}\}=x^{10} \qquad L^{-1}\{\frac{1}{s^{99}}\}=\frac{x^{98}}{98!}$$

$$L\{e^{ax}\}=\frac{1}{s-a}\Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}=e^{ax}$$

....

مثال :

$$1)L^{-1}\{\frac{1}{s-3}\}=e^{3x} \qquad 2)L^{-1}\{\frac{1}{s+4}\}=e^{-4x}$$

$$3)L^{-1}\{\frac{2}{2s-6}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s+3}\}=e^{-3x} \qquad 4)L^{-1}\{\frac{\sqrt{2}}{s-5}\}=\sqrt{2}e^{5x}$$

$$L\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2}\Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\}=\frac{1}{a}\sin ax$$

....

مثال :

$$L^{-1}=\{\frac{1}{s^2+\frac{1}{4}}\}=2\sin\frac{x}{2}$$

$$*)\ L\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}\Rightarrow L^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}=\cos ax$$

....

مثال :

$$L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9}\right\}=2\cos 3x$$

$$L\{x^{-\frac{1}{2}}\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}} \Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s}}\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}$$

مثال :

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2-3s+2}\}$$

$$\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{(s-2)(s-1)}=\frac{-1[(s-2)-(s-1)]}{(s-2)(s-1)}=-1[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}]$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2-3s+2}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}=e^{2x}-e^{x}$$

....

مثال : (برای زمانیکه قابل تجزیه نباشد)

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2-2s+5}\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{s^2-2s+4+1}\}=L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\}=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\}=\frac{1}{2}e^{x}.\sin 2x$$

....

قضیه : اگر تابع f(x) در فاصله $[0,+\infty)$ تعریف شده و مشتق پذیر باشد آنگاه :

$$I)L\{y'\}=sL\{y\}-y(0)$$

$$II)L\{y''\}=s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)$$

$$III)L\{y'''\}=s^3L\{y\}-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)$$

$$IV)L\{y^{(n)}\}=s^nL\{y\}-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}(y'(0))-...-y^{(n-1)}(0)$$

....

مثال : با استفاده از تبدیل لاپلاسی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ داده شده آن را حل کنید.

$$y''-3y'+2y=3e^{x}$$

حل) ابتدا از طرفین لاپلاس می گیریم

$$L\{y''-3y'+2y\}=L\{3e^x\}$$

$$L\{y''\}-3L\{y'\}+2L\{y\}=3L\{e^x\}$$

$$(s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0))-3(sL\{y\}-y(0))+2L\{y\}=3(\frac{1}{s-1})$$

$$s^2L\{y\}-s-1-3sL\{y\}+3+2L\{y\}=\frac{3}{s-1}$$

$$L\{y\}(s^2-3s+3)=s-2+\frac{3}{s-1}$$

$$L\{y\}=\frac{s-2}{s^2-3s+2}+\frac{3}{(s-1)(s^2-3s+2)}$$

$$L\{y\}=L^{-1}\frac{1}{s-1}+\frac{3}{(s-1)(s^2-3s+2)}\Rightarrow L^{-1}\{L\{y\}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+3L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\}$$

$$L\{y\}=\{\frac{1}{s-1}\}+3L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\}*$$

تجزیه قسمت دوم :

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{c}{(s-2)}$$

$$1=A(s-1)(s-2)+B(s-2)+c(s-1)^2$$

$$s=1\Rightarrow 1=A(0)+B(1-2)+c(0)\Rightarrow B=-1$$

$$s=2\Rightarrow 1=A(2-1)(0)+B(0)+c(2-1)^2\Rightarrow c=1$$

$$s=0\Rightarrow 1=A(0-1)(0-2)+(-1)(0-2)+(1)(0-1)^2\Rightarrow 2A=1-2-1\Rightarrow A=-1$$

(ادامه * $\Rightarrow y=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}-3L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}-3L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}+3L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}$

$$\Rightarrow y=e^x-3e^x-3xe^x+3e^{2x}$$

$$\Rightarrow y=-2e^x-3xe^x+3e^{3x}$$

....

قضیه مهم :

$$If \quad L\{f(x)\}=F(s) \qquad Then \quad L\{\frac{f(x)}{x}\}=\int_s^{+\infty}F(u)du$$

....

مثال :

$$L\{\frac{\sin x}{x}\}$$

حال با توجه به اینکه :

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1}$$

لذا :

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

پس :

$$f(u) = \frac{1}{u^2+1}$$

با توجه به قضیه قبل :

$$L\{\frac{\sin x}{x}\} = \int_s^{+\infty} f(u)du = \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \arctan\Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$$

مثال : به دست بیاورید:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = ?$$

حل) ابتدا حساب می کنیم : از طرفی با توجه به قسمت قبل داریم :

$$L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - arc \ \tan(s)$$

حال با اختیاری بودن s و $s \geq 0$ لذا $s = 0$ را در نظر می گیریم :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

....

تمرین : نشان دهید که :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}dx = Ln\frac{b}{a}$$

....

یادآوری:

$$u(x-c)=\begin{cases} 1 & x \ge c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

$$L\{u(x-c)\}=L(u_c(x)\}=\frac{e^{-cs}}{s} \quad , \quad L^{-1}\{\frac{e^{-cs}}{s}\}=u_c(x)$$

....

قضیه : اگر $L\{f(x)\}=F(s)$ و C>۰ آنگاه :

$$L\{u_c(x).f(x-c)\}=e^{-cs}.F(s)$$

و بالعکس :

$$L^{-1}\{e^{-cs}.F(s)\}=u_c(x).f(x-c)$$

....

مثال :

$$L\{u_{2\pi}(x).\cos(x-2\pi)=?$$

$$L\{\cos x\}=\frac{s}{s^2+1}=F(s)$$

$$L\{u_{2\pi}(x).\cos(x-2\pi)\}=e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

....

مثال :

$$L^{-1}\{\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}-L^{-1}\{\frac{e^{2s}}{s}\}=x-L^{-1}\{e^{2s}.\frac{1}{s^2}\}=x-u_{-2}(x).(x+2)$$

....

مثال :

$$L^{-1}\{\frac{e^{-3x}}{s^2-s-2}\}$$

تجزیه کسر :

$$\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s+1)(s-2)}=\frac{\frac{1}{3}[(s+1)-(s-2)]}{(s+1)(s-2)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1})$$

$$*)\Rightarrow L^{-1}\{\frac{e^{-3x}}{s^2-s-2}\}=\frac{1}{3}L^{-1}\{e^{-3x}.\frac{1}{s-2}\}-\frac{1}{3}L^{-1}\{e^{-3x}.\frac{1}{s+1}\}$$

$$=\frac{1}{3}u_3(x).e^{2(x-3)}-\frac{1}{3}u_3(x).e^{-(x-3)}$$

....

مثال : معادله دیفرانسیل $y''+y=f(x)$ که در آن :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (\pi\le x \text{ یا } x<2\pi)\\ 0 & (x<\pi \text{ یا } x\ge 2\pi)\end{cases}$$

و $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ را حل کنید.

حل) $L\{y''+y\}=L\{f(x)\}$

$$L\{y''\}+L\{y\}=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+L\{y\}=\int_0^{\pi}e^{-sx}\overset{0}{\cancel{f(x)}}dx+\int_{\pi}^{2\pi}e^{-sx}\overset{1}{\cancel{f(x)}}dx$$

$$+\int_{2\pi}^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

$$\Rightarrow s^2L\{y\}-s-1+L\{y\}=\int_{\pi}^{2\pi}e^{-sx}dx$$

$$L\{y\}(s^2+1)-s-1=-\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\frac{1}{s}(e^{-2\pi s}-e^{-\pi s})$$

$$L\{y\} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}.\frac{1}{s(s^2+1)} + e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$L^{-1}\{L\{y\}\} = L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} - L^{-1}\{e^{-2\pi s}.\frac{1}{s(s^2+1)}\}$$

$$+L^{-1}\{e^{-\pi s}.\frac{1}{s(s^2+1)}\} \Rightarrow y = L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} - L^{-1}\{e^{-2\pi s}.\frac{1}{s}\}$$

$$+L^{-1}\{e^{-2\pi s}.\frac{s}{s^2+1}\} + L\{e^{-\pi s}.\frac{1}{s}\} - L^{-1}\{e^{-\pi s}.\frac{s}{s^2+1}\}$$

$$\Rightarrow y = \cos x + \sin x - u_{2\pi}(x)(1) + u_{2\pi}(x).\cos(x-2\pi) +$$

$$u_\pi(x).(1) - u_\pi(x).\cos(x-\pi)$$

....

تمرین :

الف) $y'' + 3y' + 2y = u_2(x)$ $\qquad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$

ب) $y'' + y' + y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 1$$