فصل اول

یادآوری روش های انتگرال گیری:

۱)روش فرمول ها:

مثلا :

$$\int \frac{U'}{U} dx = \ln u + c$$

مثال)

$$\int \frac{x}{2x^2 + 1} dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2 + 1) + c$$

مثال)

$$\int \tan x dx = ?$$

حل) $-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + c$

و بقیه فرمول ها در آخر کتاب معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار بطور کامل موجود است و یا می توان برای آشنای بیشتر به جلد دوم ریاضی عمومی ایساک مارون مراجعه کرد (ترجمه خلیل پاریاب).

....

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

۲)روش تغییر متغیر:

گاهی بسیاری از انتگرال ها با فرمولی بطور مستقیم قابل حل نیستند لذا باید تا حد امکان ساده شوند و سپس از فرمولها وقاعده ها برای حل استفاده کرد.

مثال)

$$\int \frac{(x^۲-۱)}{(x^۴+۳x^۲+۱)arc\tan(\frac{x^۲+۱}{x})}dx$$

ابتدا صورت و مخرج را بر $x^۲$ تقسیم میکنیم

حل) $$\int \frac{(۱-\frac{۱}{x^۲})}{\left(x^۲+۳+\frac{۱}{x^۲}\right)arc\tan(x+\frac{۱}{x})}dx$$

$$=\int \frac{(۱-\frac{۱}{x^۲})}{(\left(x^۲+\frac{۱}{x}\right)^۲+۱)arc\tan(x+\frac{۱}{x})}dx$$

حال: *

$$\left[x+\frac{۱}{x}=t \quad \rightarrow \quad \left(۱-\frac{۱}{x^۲}\right)dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{(۱-\frac{۱}{x^۲})}\right]$$

$$\overset{*}{\Rightarrow}\int \frac{(۱-\frac{۱}{x^۲})}{(t^۲+۱)^۲ arc\tan t}\frac{dt}{(۱-\frac{۱}{x^۲})}$$

حال**

$$\left[arc\tan t=u \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{۱+t^۲}dt=du \quad \rightarrow \quad dt=(۱+t^۲)\,du\right]$$

$$\overset{**}{\Rightarrow}\int \frac{۱}{(t^۲+۱).u}.(۱+t^۲)du$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\Rightarrow \int \frac{۱}{u} du = \ln|u| + c$$

$$\Rightarrow \ln\left|arc\tan\left(x + \frac{۱}{x}\right)\right| + c$$

....

تمرین:

$$۱) \int \frac{dx}{a^{۲}\sin^{۲}x + b^{۲}\cos^{۲}x}$$

راهنمایی: $\frac{a}{b}\tan x = u$

۳)حال روش جزء به جزء:

اصل قاعده چنین است:

داریم : uv

حال از طرفین دیفرانسیل می گیریم:

$$d(u.v) = u.dv + v.du$$

اکنون از طرفین انتگرال می گیریم:

$$\int d(u.v) = \int u.dv + \int v.du$$

$$u.v = \int u.dv + \int v.du$$

حال به فرمول جزء به جزء می رسیم:

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

مثال:

$$\int (x^{۳} + ۱)\cos x dx \overset{*}{\Rightarrow} (x^{۳} + ۱)\sin x + (۳x^{۲})\cos x - ۶x\sin x - ۶\cos x + c$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

حل:❋

انتگرال متوالی	مشتق متوالی
$\cos x$	$(x^{۳}+۱)$
$\sin x$	$۳x^{۲}$
$-\cos x$	$۶x$
$-\sin x$	۶
$\cos x$	۰

....

تمرین:

$۱)\int \cos(\ln x)dx = ؟$ راهنمایی: $\cos(\ln x)=u \quad , \quad dx=dv$

$۲)\int e^{۵x}.\cos ۴x dx = ?$

....

۴)روش تجزیه کسرها:

مثال:

$$\int \frac{۵x+۹}{x^{۳}+۲x^{۲}-۳}dx = ?$$

داریم:❋

$$\left[\frac{۵x+۹}{x(x^{۲}+۲x-۳)} = \frac{۵x+۹}{x(x+۳)(x-۱)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{(x+۳)}+\frac{c}{(x-۱)}\right.$$

$$۵x+۹ = a(x+۳)(x-۱)+b(x)(x-۱)+c(x)(x+۳)$$

$$x=۰ \quad \Rightarrow \quad -۳a=۹ \quad \rightarrow \quad a=-۳$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$x=-۳ \quad \dot{\Rightarrow} \quad ۱۲b=-۶ \quad \dot{\rightarrow} \quad b=-\frac{۱}{۲}$$

$$x=۱ \quad \dot{\Rightarrow} \quad ۴\,c=۱۴ \quad \dot{\rightarrow} \quad c=\frac{۷}{۲}]$$

حال در انتگرال قرار میدهیم:

$$\overset{*}{\Rightarrow}\int\left(\frac{-۳}{\mathrm{x}}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{\mathrm{x}+۳}+\frac{\frac{۷}{۲}}{\mathrm{x}-۱}\right)\mathrm{dx}$$

$$\dot{\Rightarrow}-۳\ln \mathrm{x}-\frac{۱}{۲}\ln(\mathrm{x}+۳)+\frac{۷}{۲}\ln(\mathrm{x}-۱)+\mathrm{c}$$

....

تمرین:

$$۱)\int\frac{x^{۲}}{(x+۱)(x-۲)^{۳}}dx \qquad ۲)\int\frac{x^{۴}}{x^{۴}-۱}dx$$

۵) **روش محاسبه انتگرال های مثلثاتی:**

$$\int \cos^{n} x\,.\sin^{\mathrm{m}}\mathrm{x}\,\mathrm{dx}$$

الف) چهار روش وجود دارد :

الف) m زوج و n فرد   ب) m فرد و n زوج   ج) m فرد و n فرد   د) m زوج و n زوج

مثال)

$$\int \sin^{۲} x\,.\cos^{۵}\mathrm{x}\,\mathrm{dx}=؟$$

حل) $\int \sin^{۲} x\,.(\cos^{۴}\mathrm{x})\,.\cos\mathrm{x}\,\mathrm{dx}=\int \sin^{۲} x\,.(۱-\sin^{۲}\mathrm{x})^{۲}.\cos\mathrm{x}\,\mathrm{dx}$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$* \left[\sin x = t \qquad \to \qquad dx = \frac{dt}{\cos x}\right]$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \int t^{۲}(۱ - t^{۲})^{۲}.\cos x.\frac{dt}{\cos x}$$

$$= \int t^{۲}(۱ - ۲t^{۲} + t^{۴})dt = \int (t^{۲} - ۲t^{۴} + t^{۶})dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t^{۳}}{۳} - \frac{۲t^{۵}}{۵} + \frac{t^{۷}}{۷} + c = \frac{\sin^{۳} x}{۳} - \frac{۲}{۵}\sin^{۵} x + \frac{۱}{۷}\sin^{۷} x + c$$

....

تمرین:

۱) $\int \sin^{۵} x . \cos^{۳} x \, dx = ?$ ۲) $\int \sin^{۲} x . \cos^{۴} x dx = ?$

....

ب) برای محاسبه انتگرال هایی به صورت :

$$\int \sin ax . \cos bx \, dx$$

از فرمول های زیر استفاده میکنیم:

$$\sin a . \cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

$$\sin a . \sin b = \frac{۱}{۲}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a . \cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

مثال:

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\int \sin ۷x . \cos ۳x \, dx = ?$$

حل:

$$\int \frac{۱}{۲} (\sin(۷x - ۳x) + \sin(۷x + ۳x)) dx$$

$$= \frac{۱}{-۴ \times ۲} \int -۴ \sin ۴\mathrm{x} \, \mathrm{dx} + \frac{۱}{-۱۰ \times ۲} \int -۱۰ \sin(۱۰x) \, dx = -\frac{۱}{۸} \cos(۴\mathrm{x}) - \frac{۱}{۲۰} \cos(۱۰\mathrm{x}) + c$$

....

ج) انتگرال های به صورت :

$$\int \cot^{\mathrm{n}} \mathrm{x} \, \mathrm{dx} \quad , \quad \int \tan^{\mathrm{n}} \mathrm{x} \, \mathrm{dx}$$

به روش زیر حل می شوند (۲واحد ۲واحد کم و زیاد می کنیم تا به توان ۰ یا ۱ برسیم.).

مثال:

$$\int \tan^{۷} x \, dx = ?$$

حل:

$$\int (\tan^{۷} x + \tan^{۵} x - \tan^{۵} x + \tan^{۳} x - \tan^{۳} x + \tan x - \tan x) dx$$

$$= \int \tan^{۵} (\tan^{۲} x + ۱) dx - \int \tan^{۳} (\tan^{۲} x + ۱) dx + \int \tan (\tan^{۲} x + ۱) dx - \int \tan x \, dx$$

حال:❊

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\left[\tan x = u \quad \rightarrow \quad (۱ + \tan^{۲} x)\mathrm{dx} = \mathrm{du} \quad \rightarrow \quad \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{du}}{۱ + \tan^{۲} \mathrm{x}}\right]$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \int \mathrm{u}^{۵}\mathrm{du} - \int \mathrm{u}^{۳}\mathrm{du} + \int \mathrm{u}\,\mathrm{du} - \int \frac{\sin \mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{u}^{۶}}{۶} - \frac{\mathrm{u}^{۴}}{۴} + \frac{\mathrm{u}^{۲}}{۲} + \ln(\cos \mathrm{x}) + \mathrm{c}$$

$$= \frac{۱}{۶}\tan^{۶} \mathrm{x} - \frac{۱}{۴}\tan^{۴} \mathrm{x} + \frac{۱}{۲}\tan^{۲} \mathrm{x} + \ln(\cos \mathrm{x}) + \mathrm{c}$$

....

د)روش وایراشتراس:

وقتی که sin و cos در مخرج موجود باشد از تغییر متغیرهای زیر استفاده می کنیم.

$$\sin x = \frac{۲\tan\frac{\mathrm{x}}{۲}}{۱ + \tan^{۲}\frac{\mathrm{x}}{۲}} \qquad , \qquad \cos \mathrm{x} = \frac{۱ - \tan^{۲}\frac{\mathrm{x}}{۲}}{۱ + \tan^{۲}\frac{\mathrm{x}}{۲}}$$

مثال:

$$\int \frac{۱}{\sin x}dx = \int \frac{۱ + \tan^{۲}\frac{\mathrm{x}}{۲}}{۲\tan\frac{\mathrm{x}}{۲}}\mathrm{dx}$$

حال:*

$$\left[\tan\frac{x}{۲} = u \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{۲}\left(۱ + \tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)dx = du \quad \rightarrow \quad dx = \frac{۲du}{\left(۱ + \tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)}\right]$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \int \frac{۱ + \tan^{۲} \mathrm{x}}{۲\mathrm{u}}.\frac{۲\mathrm{du}}{۱ + \tan^{۲} \mathrm{x}} = \int \frac{۱}{\mathrm{u}}\mathrm{du} = \ln|\mathrm{u}| + \mathrm{c} = \ln\left|\tan\frac{\mathrm{x}}{۲}\right| + \mathrm{c}$$

....

تمرین:

$$۱)\int \cot^{۱۰} x\, dx = ?$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

۲) $\int \frac{d\theta}{۱-\sin\theta} = ؟$

۳) $\int \frac{dx}{۱+۲\cos x} = ?$

۴) $\int \frac{d\theta}{۴\sin\theta + ۳\cos\theta} = ?$

....

ه) برای محاسبه ی انتگرال های که عواملی به صورت

$$a^۲ \pm x^۲ \quad \text{یا} \quad \sqrt{x^۲ - a^۲} \quad \text{یا} \quad \sqrt{a^۲ \pm x^۲}$$

داشته باشند می توان از تغیر متغیرهای زیر استفاده کرد:

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} \quad \dot{\rightarrow} \quad x = a\sin\theta \quad \text{یا} \quad x = a\cos\theta$$

$$\sqrt{a^۲ + x^۲} \quad \dot{\rightarrow} \quad x = a\tan\theta$$

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} \quad \dot{\rightarrow} \quad x = \frac{a}{\cos\theta}$$

....

مثال:

$$\int \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{x^۲} dx = ?$$

حال:*

$$[\,x = ۳\sin\theta \qquad \rightarrow \qquad dx = ۳\cos\theta \; d\theta]$$

حل:

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\overset{*}{\Rightarrow}\int \frac{\sqrt{۹-۹\sin^{۲}\theta}}{(۳\sin\theta)^{۲}}.۳\cos\theta\,d\theta=\int\frac{۳\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}}{۹\sin^{۲}\theta}.۳\cos\theta\,d\theta=\int\frac{\cos^{۲}\theta}{\sin^{۲}\theta}d\theta$$

$$=\int\cot^{۲}\theta\,d\theta$$

$$=\int(\cot^{۲}\theta+۱-۱)\,d\theta$$

$$=-\int-(۱+\cot^{۲}\theta)d\theta-\int ۱\,d\theta\ =-\cot\theta\ -\theta+c$$

$$=-\cot\left(arc\sin\left(\frac{x}{۳}\right)\right)-arc\sin\left(\frac{x}{۳}\right)+c$$

....

و)انتگرال گیری از توابع اصم:

توضیح در قالب مثال .($x=u^{(\text{ک.م.م ها فرجه})}$ تغییر متغیر) مناسب است.

$$\int\frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x}}+\sqrt[3]{\mathbf{x}}}=?$$

مثال :

داریم: $[x=u^{۶}\qquad\to\qquad \mathrm{dx}=۶\mathrm{u}^{۵}\mathrm{du}]$⁕

$$\overset{*}{\Rightarrow}\int\frac{۶\mathrm{u}^{۵}}{\sqrt{\mathrm{u}^{۶}}+\sqrt[۳]{\mathrm{u}^{۶}}}\mathrm{du}=\int\frac{۶\mathrm{u}^{۵}}{\mathrm{u}^{۳}+\mathrm{u}^{۲}}\mathrm{d}u=۶*\int\left(\mathrm{u}^{۲}-\mathrm{u}+۱-\frac{\mathrm{u}^{۲}}{\mathrm{u}^{۳}+\mathrm{u}^{۲}}\right)\mathrm{du}$$

که با روش های گفته شده به راحتی قابل فهم است.

....

تمرین:

۱) $\int\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}+۱}dx=?$

۲) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۴]{x^{۵}}-\sqrt[۶]{x^{۷}}}dx=?$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

نکته:

گاهی $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\text{فرجه رادیکال}}$ مناسب است .

....

انتگرال هایی به فرم:

$$\int \cot^m x \,.\, \mathrm{cosc}^n x \; dx \qquad , \qquad \int \tan^m x \,.\, \sec^n x$$

به کمک:

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad \dot{\rightarrow} \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

و

$$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \quad \dot{\rightarrow} \quad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

آنها را به یکی از اشکال زیر در می آوریم:

$$1) \xrightarrow{m \text{ فرد}} \int f(\sec x)\,.\sec x\,.\tan x \, dx \quad \dot{\rightarrow} \quad \sec x = t$$

$$2) \xrightarrow{m \text{ زوج}} \int f(\tan x).\sec^2 x \; dx \quad \dot{\rightarrow} \quad \tan x = t$$

$$3) \xrightarrow{m \text{ زوج}} \int f(\sec x) \, dx \quad \dot{\rightarrow} \quad \text{جزء به جزء}$$

مثال:

$$\int \tan^3 x\,.\sec^5 x \, dx = ?$$

$$= \int \tan^2 x\,.\sec^4 x\,.\tan x\,.\sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1).\sec^4 x.\tan x\,.\sec x \, dx$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

داریم:❋

$$[\sec x = t \qquad \rightarrow \qquad \sec x \,.\, \tan x \, dx = dt]$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \int (t^۲ - ۱).t^۴ \, dt = \int (t^۶ - t^۴) \, dt = \frac{t^۷}{۷} - \frac{t^۵}{۵} + c = \frac{۱}{۷}\sec^۷ x - \frac{۱}{۵}\sec^۵ x + c$$

....

تمرین:

۱) $\int \sqrt{\tan x} \,.\, \sec^۴ x \, dx = ?$ ۲) $\int \tan^۲ x \,.\, \sec^۳ x \, dx = ?$

راهنمایی: $\tan x = t$

....

برخی از فرمول های مهم انتگرال معین:

۱) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

۲) $\int_a^a f(x)dx = ۰$

۳) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx \qquad ; \ \forall c \in [a,b]$

۴) $f(x) \geq ۰ \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq ۰$

۵) $f(x) \leq g(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

۶) $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

۷) $\left(\int_{a}^{u(x)} f(t)dt\right)' = f\big(u(x)\big).u'(x)$

۸) $\left(\int_{u(x)}^{w(x)} f(t)\,dt\right)' = f\big(w(x)\big).w'(x) - \mathrm{f}\big(\mathrm{u}(\mathrm{x})\big).\mathrm{u}'(\mathrm{x})$

....

مثال:

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{x}^{2}}}^{\ln \mathrm{x}} (\mathrm{t}^{4}.\operatorname{arc}\tan(\mathrm{t}^{3}+1))\,\mathrm{dt}\right) = ؟$$

حل:

$$= (\ln x)^{4}.\operatorname{arc}\tan((\ln \mathrm{x})^{2}+1).\frac{1}{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{4\mathrm{x}^{2}}.\operatorname{arc}\tan\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{x}^{2}}+1\big)\big(2\mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}^{2}}\big)$$

....

انتگرال های مجازی(غیرعادی یا ناسره):

انتگرال های ناسره انتگرال های هستند که دامنه ی انتگرال گیری آنها بی کران است و یا تابع تحت انتگرال در دامنه انتگرال گیری بی کران است و یا هر دو .

تعریف۱)فرض کنید f به $[a,+\infty)$ پیوسته باشد در این صورت :

$$\int_{a}^{+\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{b}\to+\infty}\left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}\right)$$

تعریف۲)فرض کنید f به $(-\infty,b]$ پیوسته باشد در این صورت :

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{a}\to-\infty}\left(\int_{a}^{b} f(x)dx\right)$$

تعریف۳)فرض کنید f بر $(-\infty.+\infty)$ پیوسته باشد در این صورت :

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left(\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \;+\; \int_{b}^{+\infty} f(x)dx\right) \quad : \quad b\epsilon R$$

اگر در هر یک از حدود فوق عدد حقیقی موجود باشد انتگرال ناسره را همگرا می نامیم در غیر این صورت آن را واگرا می نامیم و در حالت سوم باید هر دو انتگرال همگرا باشند در غیر این صورت واگراست.

....

مثال:

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{x^{۲}}\,dx = \lim_{b\longrightarrow+\infty}\left(\int_{۱}^{b} \frac{۱}{x^{۲}}\,dx\right) = \lim_{b\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{۱}{x}\right)\Big|_{۱}^{b}$$

$$= \lim_{b\longrightarrow+\infty}\left(\frac{-۱}{b}+۱\right) = \frac{-۱}{\infty}+۱ = ۱$$

انتگرال ناسره فوق همگراست.

....

مثال:

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{x}dx = \lim_{b\longrightarrow+\infty}\left(\int_{۱}^{b} \frac{۱}{x}dx\right) = \lim_{b\longrightarrow+\infty}\left(\ln x\Big|_{۱}^{b}\right) = \lim_{b\longrightarrow+\infty}(\ln b - \ln ۱)$$

$$= \ln(+\infty) - ۰ = +\infty$$

انتگرال ناسره فوق واگراست.

....

مثال:

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\int_{\cdot}^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{b \longrightarrow +\infty} \left(\int_{\cdot}^{b} \cos x \, dx \right) = \lim_{b \longrightarrow +\infty} \left(\sin x \Big|_{\cdot}^{b} \right)$$

$$= \lim_{b \longrightarrow +\infty} (\sin b) = \begin{cases} +۱ \\ -۱ \end{cases}$$

پس نتیجه می گیریم که انتگرال فوق واگراست.

....

مثال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, dx = \int_{-\infty}^{\cdot} e^{x} dx$$

$$+ \int_{\cdot}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \longrightarrow -\infty} \left(\int_{b}^{\cdot} e^{x} dx \right) + \lim_{b \longrightarrow +\infty} \left(\int_{\cdot}^{b} e^{-x} dx \right)$$

$$= \lim_{b \longrightarrow -\infty} \left(e^{x} \Big|_{b}^{\cdot} \right) + \lim_{b \longrightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_{\cdot}^{b} \right)$$

$$= \lim_{b \longrightarrow -\infty} (۱ - e^{b}) + \lim_{b \longrightarrow +\infty} (-e^{-b} + ۱)$$

$$= (e^{\cdot} - e^{-\infty}) + (-e^{-\infty} + e^{\cdot}) = \left(۱ + \frac{۱}{e^{+\infty}} \right) + \left(\frac{-۱}{e^{+\infty}} + e^{\cdot} \right)$$

$$= (۱ - ۰) + (۰ + ۱) = ۲$$

انتگرال ناسره فوق همگرا به ۲ می باشد.

....

تعریف۴) فرض کنید f بر $(a, b]$ پیوسته بوده و داریم:

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx = \lim_{u \to a^{+}} \left(\int_{u}^{b} f(x) dx \right)$$

تعریف۵) فرض کنید تابع f بر $[a, b)$ پیوسته بوده و داریم:

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx = \lim_{u \to b^{-}} \left(\int_{a}^{u} f(x) dx \right)$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

تعریف۶) فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ پیوسته بوده و به جزء در نقطه c که $c\in(a,b)$ و هرگاه x از یک طرف و یا دو طرف به c نزدیک شود تابع f به سمت بی نهایت میل می کند . در

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

اگر هریک از حدود فوق موجود و عدد حقیقی باشند انتگرال های مجازی همگرا می شوند در غیر این صورت واگرا می شوند و در حالت ۶ هر دو انتگرال باید همگرا شوند.

....

مثال:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx=\lim_{u\to ۰^+}\left(\int_u^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx\right)$$
$$=\lim_{u\to ۰^+}\left(\frac{-۱}{x}\Big|_u^{۱}\right)$$
$$=\lim_{u\to ۰^+}\left(-۱+\frac{۱}{u}\right)=-۱+\frac{۱}{۰^+}=-۱+\infty=+\infty$$

انتگرال فوق واگراست.

مثال:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{\sqrt{x}}dx=\lim_{u\to ۰^+}\left(\int_u^{۱}x^{-\frac{۱}{۲}}dx\right)=\lim_{u\to ۰^+}\left(۲\sqrt{x}\Big|_u^{۱}\right)=\lim_{u\to ۰^+}(۲-۲\sqrt{u})$$
$$=۲-۲\sqrt{۰}=۲$$

انتگرال فوق همگرا به ۲ می باشد.

....

مثال:

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx=\lim_{u\to ۰^-}\left(\int_{-۱}^{u}\frac{۱}{x^{۲}}dx+\int_u^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx\right)=\lim_{u\to ۰^-}\left(-\frac{۱}{x}\Big|_{-۱}^{u}\right)+\lim_{u\to ۰^-}\left(-\frac{۱}{x}\Big|_u^{۱}\right)$$

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$= \lim_{u\to ۰^-} \left(\frac{-۱}{u} - ۱\right) + \lim_{u\to ۰^-} \left(-۱ + \frac{۱}{u}\right) = +\infty$$

انتگرال فوق واگراست.

....

قضیه آزمون مقایسه در انتگرال ها مجازی:

فرض کنید f و g توابعی پیوسته بر $[a,+\infty)$ و $۰ \le f(x) \le g(x)$ که در این صورت:

۱)اگر $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ همگرا باشد آنگاه انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگراست.

۲) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ واگرا باشد آنگاه انتگرال $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ واگراست.

مثال: ثابت کنید انتگرال مجازی زیر واگرا است؟

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{x \sin x} = ?$$

حل: $۰ \le x \le \frac{\pi}{۲} \longrightarrow ۰ \le \sin x \le ۱ \longrightarrow ۰ \le x.\sin x \le x$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} ۰ \le \frac{۱}{x} \le \frac{۱}{x.\sin x} \xRightarrow{\text{حال}} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{x} dx$$

$$= \lim_{b\to ۰^+} \left(\int_b^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{x} dx\right) = \lim_{b\to ۰^+} \left(\ln x \Big|_b^{\frac{\pi}{۲}}\right)$$

$$= \lim_{b\to ۰^+} \left(\ln \frac{\pi}{۲} - \ln b\right) = \ln\left(\frac{\pi}{۲}\right) - \ln(۰^+) = +\infty$$

واگرا می باشد لذا انتگرال $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{x \sin x}$ نیز واگرا ست.

....

تعریف۷) فرض کنید f بر $(a,+\infty)$ پیوسته بوده و در نقطه a به سمت بی نهایت باشد در این صورت داریم:

انتگرال در یک نگاه- هوشمند عزیزی

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

....

تمرین: $\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{x} dx = ?$

....

تعریف۸) فرض کنید تابع f و $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ را همگرای مطلق یا مطلقا همگرا گوئیم هرگاه $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ نیز همگرا باشد ولی اگر $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگرا ولی $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ همگرا نباشد آن را همگرای مشروط می نامیم.

نکته: اگر $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نیز همگراست.

انتشارات دریک

درس اخلاقی اول:

سه درس از یک دیوانه

آورده‌اند که شیخ جنید بغدادی، به عزم سیر، از شهر بغداد بیرون رفت و مریدان از عقب او.
شیخ احوال بهلول را پرسید. گفتند: او مردی دیوانه است .
گفت: او را طلب کنید که مرا با او کار است. پس تفحص کردند و او را در صحرایی یافتند. شیخ پیش او رفت و سلام کرد.
بهلول جواب سلام او را داد و پرسید: چه کسی هستی؟
عرض کرد: منم شیخ جنید بغدادی.
فرمود: تویی شیخ بغداد که مردم را ارشاد می‌کنی؟
عرض کرد: آری..
بهلول فرمود: طعام چگونه میخوری؟
عرض کرد: اول «بسم‌الله» می‌گویم و از پیش خود می‌خورم و لقمه کوچک برمی‌دارم، به طرف راست دهان می‌گذارم و آهسته می‌جوم و به دیگران نظر نمی‌کنم و در موقع خوردن از یاد حق غافل نمی‌شوم و هر لقمه که می‌خورم «بسم‌الله» می‌گویم و در اول و آخر دست می‌شویم.
بهلول برخاست و دامن بر شیخ فشاند و فرمود: تو می‌خواهی که مرشد خلق باشی؟ در صورتی که هنوز طعام خوردن خود را نمی‌دانی. سپس به راه خود رفت.
مریدان شیخ را گفتند: یا شیخ این مرد دیوانه است.

خندید و گفت: سخن راست از دیوانه باید شنید و از عقب او روان شد تا به او رسید.
بهلول پرسید: چه کسی هستی؟
جواب داد: شیخ بغدادی که طعام خوردن خود را نمی‌داند.
بهلول فرمود: آیا سخن گفتن خود را می‌دانی؟
عرض کرد: آری. سخن به قدر می‌گویم و بی‌حساب نمی‌گویم و به قدر فهم مستمعان می‌گویم و خلق را به خدا و رسول دعوت می‌کنم و چندان سخن نمی‌گویم که مردم از من ملول شوند و دقایق علوم ظاهر و باطن را رعایت می‌کنم. پس هر چه تعلق به آداب کلام داشت بیان کرد.
بهلول گفت: گذشته از طعام خوردن، سخن گفتن را هم نمی‌دانی. سپس برخاست و برفت.
مریدان گفتند: یا شیخ دیدی این مرد دیوانه است؟ تو از دیوانه چه توقع داری؟
جنید گفت: مرا با او کار است، شما نمی‌دانید.
باز به دنبال او رفت تا به او رسید. بهلول گفت از من چه می‌خواهی؟ تو که آداب طعام خوردن و سخن گفتن خود را نمی‌دانی، آیا آداب خوابیدن خود را می‌دانی؟
عرض کرد: آری. چون از نماز عشا فارغ شدم داخل جامه خواب می‌شوم، پس آنچه آداب خوابیدن که از حضرت رسول (علیه‌السلام) رسیده بود بیان کرد.
بهلول گفت: فهمیدم که آداب خوابیدن را هم نمی‌دانی. خواست برخیزد که جنید دامنش را بگرفت و گفت: ای بهلول من هیچ نمی‌دانم، تو قربه‌الی‌الله مرا بیاموز.

بهلول گفت: چون به نادانی خود معترف شدی تو را بیاموزم. بدان که اینها که تو گفتی همه فرع است و اصل در خوردن طعام آن است که لقمه حلال باید و اگر حرام را صد از اینگونه آداب به جا بیاوری فایده ندارد و سبب تاریکی دل شود.
جنید گفت: جزاک الله خیراً!
و ادامه داد: در سخن گفتن باید دل پاک باشد و نیت درست باشد وگرنه هر عبارت که بگویی آن وبال تو باشد. پس سکوت و خاموشی بهتر و نیکوتر باشد.
و در خواب کردن این‌ها که گفتی همه فرع است؛ اصل این است که در وقت خوابیدن در دل تو بغض و کینه و حسد هیچ بشری [دوست، همسر، فرزند، والدین، همکار، ....] نباشد.
و در آخر
«اگر در روح، فروغ باشد در شخص، زیبایی خواهد بود.
اگر در شخص زیبایی باشد، در خانه، هماهنگی خواهد بود.
اگر در خانه هماهنگی باشد، در ملت نظم خواهد بود.
و اگر در ملت، **نظم باشد در جهان، صلح** خواهد بود.»
«ضرب المثلی چینی»